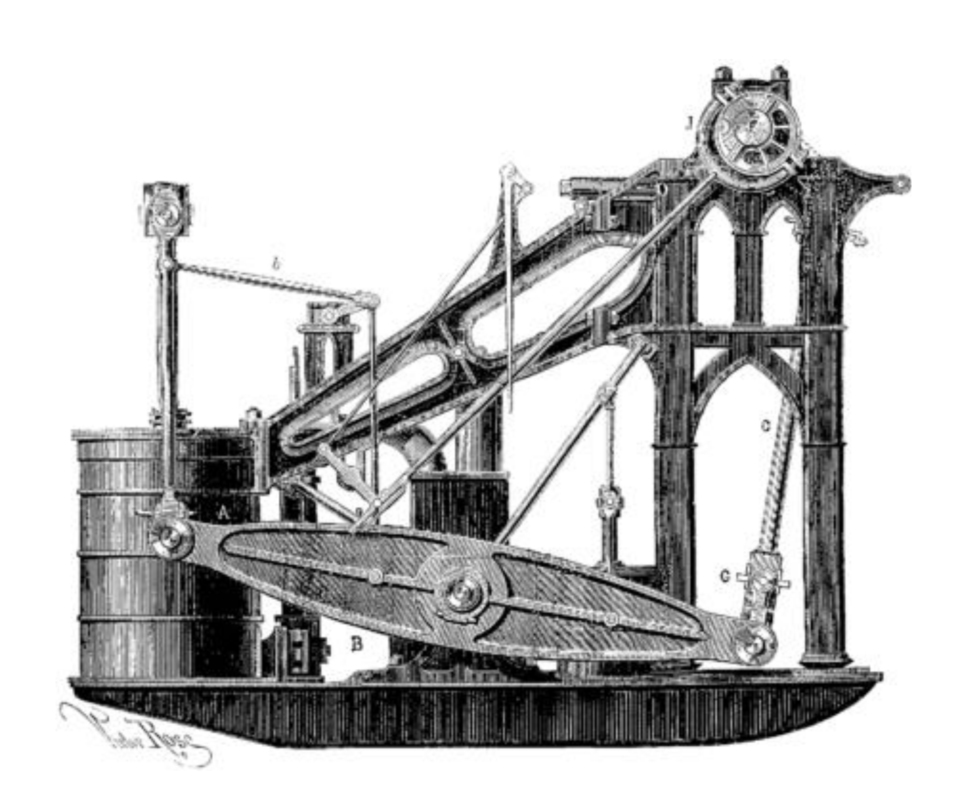




Polycopié d'exercices et examens résolus: Mécaniques des Systèmes de Solides Indéformables



M. Bourich

deuxième édition 2014

AVANT–PROPOS

Ce recueil d'exercices et examens résolus de mécanique des systèmes indéformables est issu de l'enseignement que je dispense depuis 2004. Il est destiné à être un support pédagogique pour les étudiants de la deuxième année de ENSA. Il n'est pas nécessaire de souligner l'intérêt que peuvent trouver les étudiants dans un polycopié consacré uniquement aux exercices et problèmes d'examens corrigés. Ces exercices couvrent les sept chapitres du polycopié de cours de la mécanique des systèmes indéformables :

- Calcul vectoriel-Torseurs,
- Cinématique du solide,
- Géomètrie des masses,
- Cinétique du solide,
- Dynamique du solide,
- Liaisons-Forces de liaison,
- Mouvement d'un solide autour d'un point ou d'un axe fixes.

Ces deux polycopiés, l'un de cours et l'autre d'exercices et examens résolus forment un ensemble cohérent pour permettre aux étudiants :

- de consolider leurs connaissances,
- un entrainement efficase afin de s'assurer que le cours est bien assimillé,
- d'acquérir les outils et techniques nécessaires à leur formation,
- de compéter leurs cultures scientifique en mécanique.

Chaque chapitre s'ouvre par la précision des objectifs et des compétences cherchés. De nombreux exercices et problèmes d'examens complémentaires sont proposés afin que les étudiants réalisent une autoévaluation. Je dois souligner que ce document ne remplace en aucun cas le TD en présentiel. Notons qu'il n'est pas nécessaire de résoudre un problème dans sa globalité mais, selon le degré d'avancement du cours, d'en étudier successivement les aspects cinématique, cinétique puis dynamique.

Comme pour tous les exercices auto-correctifs, les solutions profitent plus aux étudiants qui fournissent l'effort nécessaire pour réfléchir et essayer de résoudre les exercices proposés.

M. Bourich

Illustration de couverture :

Machine Marine à Balancier (vue extérieure)

(Source : https://fr.wikisource.org/wiki/Les Merveilles de la science/Bateaux à vapeur)

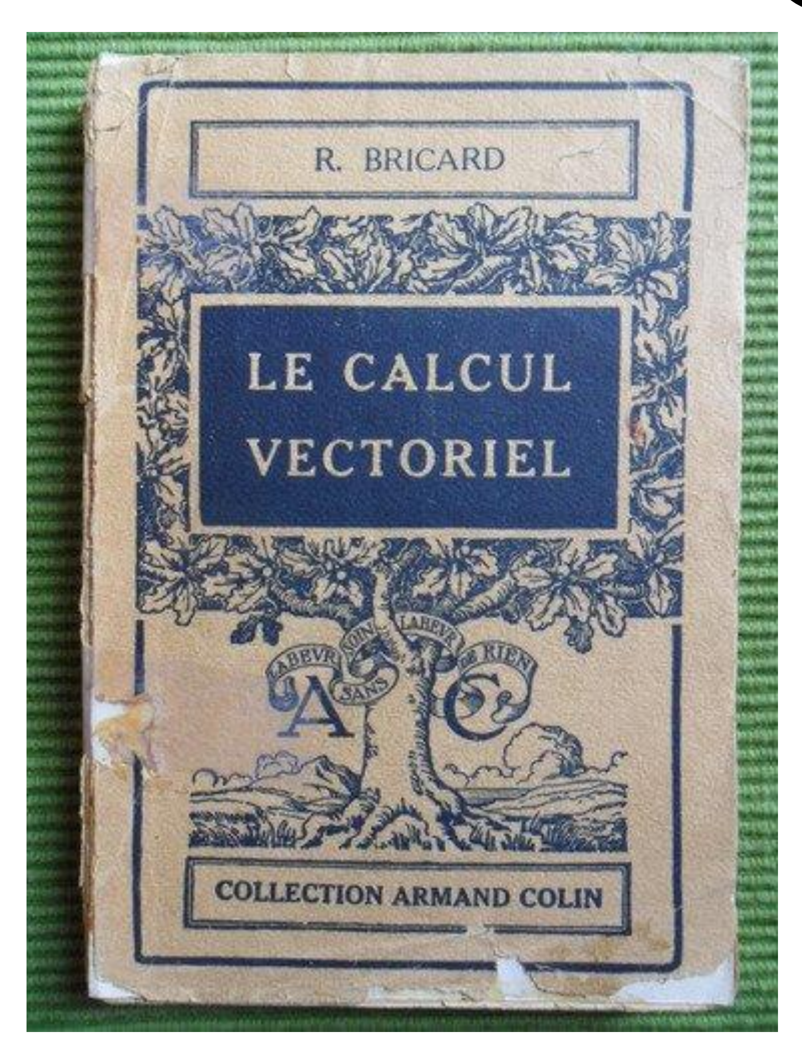
Les premiers bateaux à vapeur construits en France furent munis de machines à balancier, ou machines de Watt. Elles ne différaient de la machine de Watt en usage dans les usines et manufactures que par la position du balancier, B, lequel, au lieu d'être disposé au-dessus du cylindre à vapeur, A, était placé au-dessous; ce qui obligeait à le commander par des bielles pendantes C, partant d'une traverse b, calée sur la tige a du piston D. Cette disposition était nécessitée par la trop grande hauteur qu'eût atteinte la machine, si l'on eût disposé le balancier en dessus. La grande bielle C agit de bas en haut, et son pied s'articule sur une traverse G, qui réunit l'extrémité de chaque balancier.

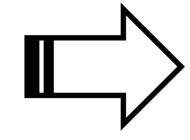
Sur la figure, A' est la boîte à tiroir, E la manivelle, F l'arbre moteur, H le condenseur, et sa pompe à air I ; J est l'excentrique conduisant le tiroir.

La machine a été construite en 1840, par Fawcett et Preston, pour la frégate le Gomer. Dans toutes les machines marines, on accouple généralement deux cylindres sur un même arbre, au moyen de manivelles calées à 90 degrés l'une de l'autre, afin d'éviter les points morts. La machine à balancier que nous venons de décrire est restée pendant près d'un demi-siècle en faveur dans la marine française, malgré l'encombrement qu'elle occasionnait. La douceur de sa marche et la solidité de ses différentes parties étaient des avantages qu'on ne pouvait dédaigner.

Chapitre

1





Calcul Vectriel-Torseurs



Galilée : (1564-1642)

La philosophie est écrite dans ce grand livre, l'univers, qui ne cesse pas d'être ouvert devant nos yeux. Mais ce livre ne peut se lire si on ne comprends pas le langage et on ne connaît pas les caractères avec lesquels il est écrit. Or, la langue est celle des mathématiques, et les caractères sont triangles, cercles et d'autres figures géométriques. Si on ne les connaît pas, c'est humainement impossible d'en comprendre même pas un seul mot. Sans eux, on ne peut qu'aller à la dérive dans un labyrinthe obscur et inextricable". G. Galilei, "Il Saggiatore", Rome, 1623

Objectifs :

- Différencier entre torseur symétrique et anti-symétrique;
- Décomposer un torseur (couple et glisseur) ;
- Comprendre la notion de torseur équiprojectif ;
- Déterminer les élements de réduction d'un torseur ;
- Déterminer l'axe central.

Exercice 1

Soit L une application de l'espace vectoriel (E) dans lui-même. L'espace (E) est associé à l'espace affine ζ à trois dimensions. L'application L est définie par :

$$L(\vec{u}(M)) = \begin{cases} \beta x - y + 4z \\ x + \beta y + \gamma z \\ -\alpha^2 x - y + \beta z \end{cases} \quad \text{avec} \quad \vec{u}(M)) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ et M un point quelconque de ζ.

1- Pour quelles valeurs des paramètres α, β et γ, l'application L est antisymétrique ?

2- Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{\Omega}$ tel que $L(\vec{u}(M)) = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}(M)$.

Corrigé

1- ξ antisymétrique $\Leftrightarrow \forall\, \vec{a}, \vec{b} \in E : \vec{a}\overrightarrow{\zeta(b)} = \vec{b}\overrightarrow{\zeta(a)}$.

Soit L, la matrice associée à ξ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E :

$$L = \begin{pmatrix} \beta & -1 & 4 \\ 1 & \beta & \gamma \\ -\alpha^2 & -1 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 1 \\ \alpha^2 = 4 \end{cases}$$

la matrice s'écrit alors: $L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2- Vecteur $\vec{\Omega}$ tel que $L(\vec{u}(M)) = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}(M)$?

Soit $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ an alors $\vec{\Omega} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$

Ce qui donne : $\vec{L}(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} -y+4z \\ x+z \\ -4x-y \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} a=-1 \\ b=4 \\ c=1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Considérons les vecteurs $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{j}$, liés respectivement aux points A (1, 0, 0) et B (1, 1, 0) et les torseurs $[G_1]$ et $[G_2]$ associés aux moments de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, respectivement.

1- montrer que $[G_1]$ et $[G_2]$ sont des glisseurs.

2- On pose $[G] = [G_1] + [G_2]$.

a- Calculer la résultante $\vec{R}$ de [G] et son moment en A. En déduire la nature de [G].

b- Déterminer l'équation cartésienne de l'axe central de [G].

Corrigé

1- La résultante de [G1] est : $[G_1]_A = [\vec{0}, \vec{U}]$, donc l'invariant scalaire $I_1 = \vec{G}_1 . \vec{R}_1 = 0 \Rightarrow$[G1] est un glisseur.

La résultante de [G2] est : $[G_2]_B = [\vec{0}, \vec{V}]$, donc l'invariant scalaire $I_2 = \vec{G}_2 . \vec{R}_2 = 0 \Rightarrow$[G1] est un glisseur.

2- a) La résultante $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = a\vec{\imath} + (1+b)\vec{\jmath}$

$$\vec{G}(A) = \vec{0} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V} = \vec{0}$$

On a deux cas à distinger :

- $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow (a,b) = (0,-1), G$ est nul.
- $\vec{R} \neq \vec{0} \Rightarrow (a,b) \neq (0,-1), G$ est un glisseur.

b) A ϵ à l'axe central Δ. Pour un point P $\epsilon\Delta$.

$$\overrightarrow{AP} \parallel \vec{R} \Rightarrow \overrightarrow{AP} \wedge \vec{R} = 0$$

Donc l'équation cartésienne de Δ est : $\begin{cases} z = 0 \\ (b+1)x - ay - (b+1) = 0 \end{cases}$

Exercice 3

Dans un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère un disque de centre O contenu dans le plan xOy. Le disque tourne dans le sens trigonométrique autour de Oz avec une vitesse de rotation ω.

1- Par un calcul direct, déterminer la vitesse $\vec{v}(M/R)$ d'un point M (x, y, 0) du disque.

2- Montrer que le champ $\vec{v}(M/R)$ forme un torseur et déterminer ses éléments de réduction en O.

3- De quel type de torseur s'agit- il ? Quel est son axe central ?

Corrigé

1- On a $\vec{V}(M) = \omega(-y\vec{\imath} + x\vec{\jmath})$.

2- On a $\overrightarrow{MM'} . \left(\vec{V}(M) - \vec{V}(M')\right) = 0$ donc le champ est équiprojectif⇒il est antisymétrique : donc le champ $\vec{V}(M)$ est un torseur.

Les éléments de réduction en O : $[V]_{(O)} = [\vec{0}, \omega\vec{k}]$.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé direct $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le champ de vecteurs $\vec{v}(M)$ dont les composantes sont définies en fonction des coordonnées (x, y, z) de M par :

$$\begin{vmatrix} v_x = 1+3y-tz \\ v_y = -3x+2tz \\ v_z = 2+tx-t^2y \end{vmatrix} \quad \text{où t est un paramètre réel.}$$

1- Calculer le vecteur $\vec{v}(M)$ au point O.

2- Pour quelles valeurs de t, ce champ est antisymétrique ?

3- Pour chaque valeur trouvée de t, déterminer les éléments de réduction du torseur (résultante et moment en O).

4- Décomposer le torseur associé à $\vec{v}(M)$ en une somme d'un couple et d'un glisseur dont on indiquera les éléments de réduction.

5- Déterminer la position de l'axe central du torseur pour t = 0 et t=2.

Corrigé

1- Le point O a pour coordonnés : $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{V(O)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2- Equiprojectivité, on utilise les points O et M ;

tq : $\overrightarrow{V(O)}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{V(M)}\overrightarrow{OM} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3y-tz \\ 2tz-3x \\ 2+tx-t^2y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow t^2-2t=0 \Rightarrow t=0 \ ou \ t=2.$

Le champ $\overrightarrow{V(M)}$ est équiprojectif pour $t=0 \ ou \ t=2$; $\overrightarrow{V(M)}$ est un torseur pour ces valeurs de t.

3- Pour $t=0$, on a $\vec{R}(\mathrm{t}=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$;

Pour $t=2$, on a $\vec{R}(\mathrm{t}=2) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$;

4- Soit les deux torseurs associés à $t=0$: $[\mathfrak{I}_0]$ et à $t=2$: $[\mathfrak{I}_2]$;

Calculons pour les deux valeurs l'invariant scalaire :

$$I_0 = \vec{V}(O).\vec{R}(\mathrm{t}=0) = -6 \neq 0$$

$$I_2 = \vec{V}(O).\vec{R}(\mathrm{t}=2) = -10 \neq 0$$

Donc les deux torseurs sont quelconques (ni glisseur ni couple) chacun peut cependant etre décomposé en la somme d'un glisseur et d'un couple :

$[\Im_0] = [\vec{V}(O), \vec{R}(\mathrm{t}=0)] = [\vec{V}(O), 0] + [0, \vec{R}(\mathrm{t}=0)]$

De meme : $[\Im_2] = [\vec{V}(O), \vec{R}(\mathrm{t}=2)] = [\vec{V}(O), 0] + [0, \vec{R}(\mathrm{t}=2)]$

Donc : $\begin{cases} \text{Couples : } \vec{C}(M) = \vec{V}(O) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \ \forall M \\ \text{Glisseurs : } \vec{G}(M) = \vec{0} + \vec{R}(\mathrm{t}) \wedge \overrightarrow{OM} \end{cases}$.

5- Soit $P \in$ à l'axe central du torseur, la positionde P par rapport à O est donnée par : $\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R}(\mathrm{t}) \wedge \overrightarrow{V(M)}}{R^2} + \lambda \vec{R}$ avec $\lambda \in R$

Pour $\lambda = 0$, $\overrightarrow{OP_0} = \frac{\vec{R}(\mathrm{t}) \wedge \overrightarrow{V(0)}}{R^2}$,

Donc pour $\mathrm{t} = 0$, $\vec{R}(\mathrm{t}=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{V(O)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, on obtient alors : $\overrightarrow{OP_0} = -\frac{1}{3}\vec{j}$

L'axe central pour $\mathrm{t} = 0$, passe par P_0 et parralèle à $\vec{R}(\mathrm{t}=0) \Longrightarrow$ parralèle à $\vec{k}$.

de la meme façon on obtient l'axe central pour $\mathrm{t} = 2$:

L'axe central pour $\mathrm{t} = 0$, passe par $P_0 = \begin{pmatrix} -4/29 \\ -5/29 \\ 2/29 \end{pmatrix}$ et parralèle à $\vec{R}(\mathrm{t}=2) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Dans un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé et direct, on considère les torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ dont les éléments de réduction au point O sont respectivement $[\vec{M}_1(O), \vec{R}_1]$ et $[\vec{M}_2(O), \vec{R}_2]$ définis par $\begin{cases} \vec{M}_1(O) = -a \sin\alpha\, \vec{i} - a\cos\alpha\, \vec{j} \\ \vec{R}_1 = \cos\alpha\, \vec{i} - \sin\alpha\, \vec{j} \end{cases}$ et $\begin{cases} \vec{M}_2(O) = -a \sin\alpha\, \vec{i} + a\cos\alpha\, \vec{j} \\ \vec{R}_2 = \cos\alpha\, \vec{i} + \sin\alpha\, \vec{j} \end{cases}$

Où a et α sont des constantes non nulles.

1- Calculer les invariants scalaires des torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ et déduire leur(s) nature(s).

2- Calculer $\vec{M}_1(O')$ pour un point O′ de coordonnées (0, 1, 1).

3- Déterminer l'équation de l'axe central de $[T_2]$ et calculer le moment $\vec{M}_2(P)$ en un point P de cet axe.

4- Déterminer les valeurs de α pour lesquelles le torseur $[T_3] = [T_1] + [T_2]$ est un glisseur.

Corrigé

1- On a : $I_1 = \vec{U}_1 . \vec{R}_1 = 0$ et $I_2 = \vec{U}_2 . \vec{R}_2 = 0$

Donc $[T_1]$ et $[T_2]$ sont des glisseurs.

2- $\vec{M}_1(O') = \vec{U}_1(O) + \vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{OO'} = (a+1)\begin{pmatrix} -sin\alpha \\ -cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

3- l'équation de l'axe central de [T_2] est donnée par : $\begin{cases} y = xtg\alpha \\ z = a \end{cases}$: $\Delta \parallel \vec{R}_2$ et passe par $\overrightarrow{OP_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$

4- [T_3] est un glisseur pour $\alpha = k\pi$ $(k \in Z)$.

Exercice 6

Dans un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct, on considère les droites D_1 et D_2 d'équations respectives $D_1\begin{pmatrix} x = 0 \\ z = 1 \end{pmatrix}$ et $D_2\begin{pmatrix} y = 0 \\ z = -1 \end{pmatrix}$.

On considère les vecteurs glissants $\vec{R}_1 = b\,\vec{j}$ et $\vec{R}_2 = a\vec{i}$ de supports respectifs D_1 et D_2, avec a et b des paramètres réels non nuls.

On définit le champ $\vec{u}(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \vec{R}_1 + \overrightarrow{MB} \wedge \vec{R}_2$. Les points A et B sont les intersections de D_1 et D_2 avec l'axe Oz, respectivement.

1- Calculer les composantes de $\vec{u}(M)$ en fonction des coordonnées (x, y, z) de M.

2- Quel est l'ensemble Δ des points M pour lesquels $\vec{u}(M)$ est colinéaire à $\vec{R}_1 + \vec{R}_2$.

3- Préciser la position de Δ par rapport à l'axe Oz.

4- Soit Q le point d'intersection de Δ avec l'axe Oz. On définit le point S tel que $\overrightarrow{QS} = \vec{u}(Q)$. Calculer les coordonnées de S et montrer que, lorsque b varie, S′ (projection de S sur le plan xOy) décrit un cercle de centre le point de coordonnées (0, -a).

Corrigé

1- On a $\vec{u}(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \vec{R}_1 + \overrightarrow{MB} \wedge \vec{R}_2 = \begin{vmatrix} b(z+1) \\ -a(z+1) \\ -bx + ay \end{vmatrix}$

2- L'axe central est parallèle à :

$\vec{R}_1 + \vec{R}_2$ et passe par le point P_0 tq : $\overrightarrow{OP_0} = \frac{(\vec{R}_1+\vec{R}_2)\wedge\vec{u}(O)}{|\vec{R}_1+\vec{R}_2|}$

4- Quand b décrit ℝ, le point S′ décrit le cercle de centre $C(0, -a)$ et de rayon a.

$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{b^2+a^2}\begin{vmatrix} -2a^2b \\ -2ab^2 \\ b^2 - a^2 \end{vmatrix}$

Exercice7

1- Montrer que le champ des vitesses d'un solide indéformable est équiprojectif.

2- Montrer que pour deux points A et B du solide $\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}$

Corrigé

1- Soit deux points A et B du solide indéformable S, par conséquent la distance entre eux est constante c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}^2 = cte \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{AB}^2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{d\overrightarrow{AO}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right) \bullet \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \bullet \overrightarrow{AB} = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} \bullet \overrightarrow{AB}$.

Les vecteurs vitesses des points A et B sont donnés respectivement par $\vec{V}(A) = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}$ et $\vec{V}(B) = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}$.

Enfin on obtient, $\vec{V}(A) \bullet \overrightarrow{AB} = \vec{V}(B) \bullet \overrightarrow{AB}$.

2- Puisque le champ des vitesses est équiprojectif, on peut écrire que $\vec{V}(B) = \vec{V}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}$ or $\vec{V}(B) - \vec{V}(A) = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$.

Par conséquent, $\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}$

Exercice8

1- Pour quelle condition le moment d'un torseur $[T]$ est constant le long d'une droite ?

2- Les éléments de réduction d'un torseur sont $\vec{R} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \end{Bmatrix}$ et $\vec{M}(O) = \begin{Bmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{Bmatrix}$ dans un repère orthonormé $R[0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$. Déterminer le point I où l'axe central (Δ) rencontre le plan $(O, \vec{k}, \vec{i})$.

Corrigé

1- Le moment d'un torseur $[T]$ est constant le long d'une droite (Δ), il faut et il suffit que cette droite soit parallèle à la résultante $\vec{R}$ de $[T]$ (supposée non nulle). Soient deux points A et B appartenant à l'axe (Δ) : $\vec{M}(B) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}$ or $\vec{R}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. Ainsi $\vec{M}(B) = \vec{M}(A)$ ce qui signifie que le moment du torseur $[T]$ est constant le long de (Δ).

2- L'axe central $(\Delta) = \{I \;/\; \vec{M}(I) = \lambda \vec{R}\}$ par conséquent $\vec{M}(I) \wedge \vec{R} = \vec{0}$. Le moment en I est donnée par $\vec{M}(I) = \vec{M}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OI}$ en posant $\overrightarrow{OI} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$ on obtient

$$\vec{M}(I) = \begin{Bmatrix} 6 + 6z - 4y \\ 3 + 4x - 10z \\ -6 + 10y - 6x \end{Bmatrix}.$$

Par conséquent, $\vec{M}(I) \wedge \vec{R} = \vec{0}$ conduit à la résolution du système algébrique suivant :

$$\begin{cases} 52x - 60y - 40z = -48 \\ -60x + 116y - 24z = 84 \\ -40x - 24y + 136z = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{47}{38} + \dfrac{5}{3}y \\ z = -\dfrac{31}{76} + \dfrac{2}{3}y \end{cases}$$

Puisqu'on s'intéresse au point I^* d'intersection de (Δ) avec le plan $(O, \vec{k}, \vec{i})$ la coordonnée $y = 0$, par conséquent $\overrightarrow{OI^*} = \begin{pmatrix} -\dfrac{47}{38} \\ 0 \\ -\dfrac{31}{76} \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Dans un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on considère les trois glisseurs définis par les trois vecteurs :

$\vec{V}_1 = (1,0,-1)$ d'origine $A = (1,0,0)$

$\vec{V}_2 = (1,2,2)$ d'origine $B = (0,1,0)$

$\vec{V}_3 = (\lambda, \mu, \nu)$ d'origine $C = (0,0,1)$

Soit [T] la somme des trois glisseurs.

1- Déterminer (λ, μ, ν) pour que [T] soit un couple et trouver son moment.

2- Déterminer la relation que doit lier λ, μ et ν pour que [T] soit un glisseur ?

3- Dans le cas où $(\lambda, \mu, \nu) = (-2, 0, -1)$, trouver les équations de l'axe central de [T]. Que peut-on dire de la direction de l'axe central ?

Corrigé

On peut écrire le torseur $[T]=[\vec{R},\vec{M}]$ avec $\vec{R}=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3$ et $\vec{M}_O=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{v}_1+\overrightarrow{OB}\wedge\vec{v}_2+\overrightarrow{OC}\wedge\vec{v}_3$

On obtient $\vec{M}_O=\begin{pmatrix}2-\mu\\1+\lambda\\-1\end{pmatrix}$

1- Pour avoir un couple, il faut et il suffit qu'on ait $\vec{R}=\vec{0}$ or $\vec{R}=\begin{pmatrix}\lambda+2\\\mu+2\\\nu+1\end{pmatrix}$

D'où on a un couple pour $\lambda=-2$, $\mu=-2$ et $\nu=-1$.

Alors $\vec{M}_p=\vec{M}_O=\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}\quad\forall P$.

2- Pour avoir un glisseur il faut et il suffit que l'on ait : $\vec{R}\bullet\vec{M}_p=0$ et $\vec{R}\neq\vec{0}$, avec $\vec{M}_p=\vec{M}_O+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}$. Par conséquent,
$\vec{R}\bullet\vec{M}_p=\vec{R}\bullet\left(\vec{M}_O+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}\right)=\vec{R}\bullet\vec{M}_O+\vec{R}\bullet(\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP})=\vec{R}\bullet\vec{M}_O$

L'invariant scalaire de $[T]$.est $I=\vec{R}\bullet\vec{M}_p=\vec{R}\bullet\vec{M}_O$

$\vec{R}\bullet\vec{M}_O=0\Rightarrow\ 4\lambda-\mu-\nu+5=0$ et $\vec{R}\neq\vec{0}\Rightarrow(\lambda,\mu,\nu)\neq(-2,-2,-1)$.

2- Soit $P(x,y,z)$, on veut l'ensemble des points P où $\vec{M}_p\,//\,\vec{R}$.
On écrit $\vec{M}_p=\vec{M}_O+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}=\alpha\vec{R}$. Comme on peut écrire $\vec{M}_p\wedge\vec{R}=\vec{0}$

On trouve $z=-1,\ x=-\dfrac{1}{2}$. L'axe central est la parallèle à $\vec{y}$ passant par le point $(-\dfrac{1}{2},y,-1)$.

Exercice 10

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère les torseur $[T_1]$ et $[T_2]$ dont les éléments de réduction en O sont respectivement $\left[\cos(\alpha),\sin(\alpha),0;-a\sin(\alpha),a\cos(\alpha),0\right]$ et $\left[\cos(\alpha),\text{-}\sin(\alpha),0;-a\sin(\alpha),\text{-}a\cos(\alpha),0\right]$, a et α sont des constantes non nulles données avec $\alpha\in\ ]0,\boldsymbol{\pi}[$.

1- Préciser la nature des torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$.
2- λ_1 et λ_2 étant deux réels, soit $[T]=\lambda_1[T_1]+\lambda_2[T_2]$. Trouver l'invariant scalaire I de $[T]$, le produit scalaire (ou le comoment) de $[T_1]$ et $[T_2]$. Trouver une relation entre I et ce comoment.

Corrigé

Les deux torseurs sont donnés par

$[T_1]=[\vec{R}_1,\vec{M}_1]$ et $[T_2]=[\vec{R}_2,\vec{M}_2]$ avec $\alpha\in]0,\pi[$ et a une constante non nulle. Les résultantes sont données par $\vec{R}_1=(\cos(\alpha),\sin(\alpha),0)$ et $\vec{R}_2=(-a\sin(\alpha),a\cos(\alpha),0)$. Les moments sont donnés par $\vec{M}_1=(-a\sin(\alpha),\,a\cos(\alpha),0)$ et $\vec{M}_2=(-a\sin(\alpha),-a\cos(\alpha),0)$.

1- On examine les invariants scalaires I_1 et I_2 de $[T_1]$ et $[T_2]$ ($I_1=\vec{R}_1\bullet\vec{M}_1, I_2=\vec{R}_2\bullet\vec{M}_2$).
On trouve $I_1=0$ et $I_2=0$ or $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ ne peuvent être nuls, donc on a $[T_1]$ et $[T_2]$ sont des glisseurs.

2- T réduit en O est défini par

$$[T]=\lambda_1[T_1]+\lambda_2[T_2]=\begin{bmatrix}(\lambda_1+\lambda_2)\cos(\alpha) & -a(\lambda_1+\lambda_2)\sin(\alpha)\\ (\lambda_1-\lambda_2)\sin(\alpha) & a(\lambda_1-\lambda_2)\cos(\alpha)\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

L'invariant scalaire $I=\vec{R}\bullet\vec{M}=-4a\lambda_1\lambda_2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$, donc en général $[T]$ n'est pas un glisseur puisque $I\neq 0$ (sauf pour $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$).

Le comoment des deux torseurs est défini par :

$$[T_1]\bullet[T_2]=\vec{M}_1\cdot\vec{R}_2+\vec{M}_2\cdot\vec{R}_1=-4a\sin(\alpha)\cos(\alpha)=\frac{I}{\lambda_1\lambda_2}.$$

Exercice 11

Soit $[T_1]$ et $[T_2]$ deux torseurs dont les éléments de réduction en un point A sont $\vec{R}_1$, $\vec{M}_1(A)$ et $\vec{R}_2$, $\vec{M}_2(A)$.

1- Montrer que le champ $\vec{M}=\vec{R}_1\wedge\vec{M}_2+\vec{M}_1\wedge\vec{R}_2$ est un champ de moments.
2- Montrer que le champ $\vec{M}$ précédent et la résultante $\vec{R}_1\wedge\vec{R}_2$ définissent un torseur. On désigne ce torseur par $[T_1]\wedge[T_2]$.

Corrigé

1- L'AS ferait intervenir la résultante générale ; on choisit plutôt de prouver l'EP où la résultante n'intervient pas.
A prouver $\forall A, B$ on a $\left(\vec{M}(B)-\vec{M}(A)\right)\bullet \overrightarrow{AB}=0$.

$$\vec{M}(B)-\vec{M}(A)=\vec{R}_1 \wedge (\vec{M}_2(B)-\vec{M}_2(A))+(\vec{M}_2(B)-\vec{M}_2(A))\wedge \vec{R}_2$$

Or $\vec{M}_1(B)=\vec{M}_1(A)+\vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{AB}$ et $\vec{M}_2(B)=\vec{M}_2(A)+\vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{AB}$

Ainsi,

$$\vec{M}(B)-\vec{M}(A)=\vec{R}_1 \wedge (\vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{AB})+(\vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{AB})\wedge \vec{R}_2$$

En utilisant la propriété du double produit vectoriel suivante :

$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})=\vec{v}\cdot(\vec{u}\cdot\vec{w})-\vec{w}\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$, on trouve

$$\vec{M}(B)-\vec{M}(A)=\vec{R}_2 \cdot(\vec{R}_1 \cdot \overrightarrow{AB})-\vec{R}_1 \cdot(\vec{R}_2 \cdot \overrightarrow{AB}) \ =(\vec{R}_1 \wedge \vec{R}_2)\wedge \overrightarrow{AB}$$

En posant $\vec{R}=\vec{R}_1 \wedge \vec{R}_2$, on trouve $\vec{M}(B)=\vec{M}(A)+\vec{R}\wedge \overrightarrow{AB}$
Ainsi le champ $\vec{M}=\vec{R}_1\wedge\vec{M}_2+\vec{M}_1\wedge\vec{R}_2$ est un champ de moments.

2- D'après l'équation (1) on peut conclure que le champ équiprojectif $\vec{M}$ et la résultante $\vec{R}=\vec{R}_1 \wedge \vec{R}_2$ définissent un torseur $[T]=[\vec{R},\vec{M}]$.

Exercices complémentaires

Exercice 12

Dans un repère $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé direct, on considère le champ de vecteurs défini par $\vec{u}(M) = -z\vec{i} + z\vec{j} + (x-y)\vec{k}$ où x, y et z sont les coordonnées de M dans le repère R.

1- Montrer que ce champ est antisymétrique.

2- Déterminer ses éléments de réduction au point O.

3- Déterminer la nature du torseur correspondant et son axe central.

Exercice 13

On considère deux torseurs dont les éléments de réduction en un point M quelconque sont respectivement $\left[\vec{v}_1(M),\ \vec{R}_1\right]$ et $\left[\vec{v}_2(M),\ \vec{R}_2\right]$. On définit le champ de vecteurs $\vec{v}(M)$ par

$$\vec{v}(M) = \vec{R}_1 \wedge \vec{v}_2(M) - \vec{R}_2 \wedge \vec{v}_1(M)$$

1- Montrer que le champ $\vec{v}(M)$ est équiprojectif.

2- Déterminer la résultante associée à ce champ.

Exercice 14

Considérons le repère fixe $R_o(Ox_oy_oz_o)$ et un deuxième repère R(Gxyz) lié à un solide (S). Désignons par E l'espace vectoriel associé à l'espace affine ζ lié à (S). On considère l'application L définie de l'espace vectoriel E vers lui-même qui, à $\vec{u} \in E$, fait correspondre $L\ (\vec{u}) = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0}$.

1- a. Vérifier que L est une application linéaire antisymétrique.

b. Donner la forme de sa matrice dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ du repère R.

2- En déduire qu'il existe un vecteur $\vec{\Omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ tel que: $L\ (\vec{u}) = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}$.

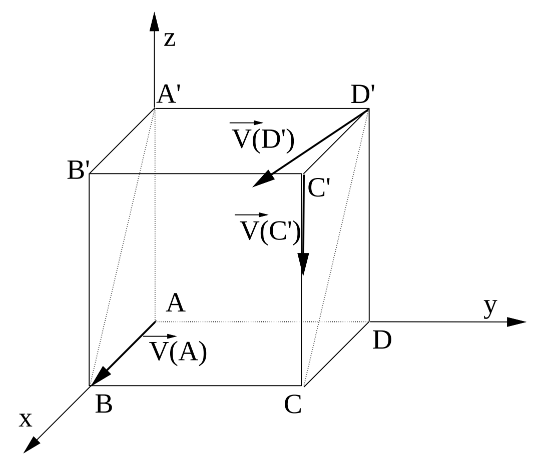
Exercice 15

On considère un cube ABCDA′B′C′D′ d'arête *a*. On a les relations suivantes :

$\vec{v}(A) = \overrightarrow{AB}$

$\vec{v}(C')$ *colinéaire à* $C'C$

$\vec{v}(D')$ *contenue dans le plan* $A'D'CB$



Un repère Axyz est lié au cube de sorte que Ax soit colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{AB}$, Ay colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{AD}$, Az colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{AA'}$. On admet que le champ de vecteurs $\vec{v}(M)$ obéit à la relation de transfert d'un torseur.

1- Déterminer les composantes de la résultante $\vec{R}$ du torseur dans le repère Axyz.

2- Calculer $\vec{v}(D')$ par ses composantes dans le repère Axyz.

3- Déterminer l'équation paramétrique de l'axe central du torseur.

4- Quelle est la nature de ce torseur ?

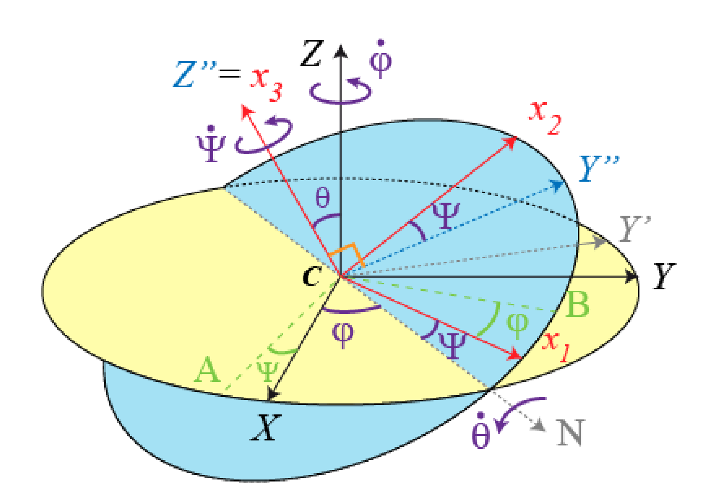
Exercice 16

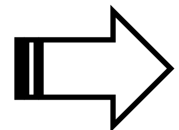
1- Calculer le moment d'un glisseur sur son axe central.

2- Montrer que si le moment d'un torseur est nul en un point de l'espace, alors ce torseur est un glisseur et le point en question est un point de l'axe central.

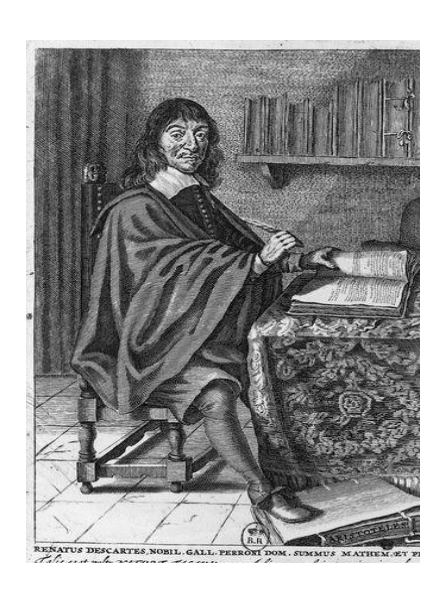
Chapitre

2





Cinématique du Solide



René Descartes : (1596-1650)

René Descartes a écrit les principes de la philosophie en 1644, dont l'objectif est de " donner des fondements rigoureux à la philosophie". La physique cartésienne est fondée sur l'identification de la matière avec la quantité géométrique : la pesanteur et le mouvement sont ramenés à une explication mécaniste. Sa description du monde est essentiellement **cinématique**, le mouvement se transmettant de proche en proche par contact. Dans les Principes de la Philosophie, Descartes distingue la cause première de tous les mouvements (Dieu, auteur de la nature), des causes secondes appelées les lois De la nature, qui régissent le mouvement des parties de la matière.

Objectifs :

- Comprendre le mouvement du solide étudié (points fixes, axes de rotation …) ;
- Différencier entre vitesse linéaire et vitesse angulaire ;
- Différencier entre réferentiesl absolu, relatif et d'étude ;
- Illustrer la distinction entre vitesse absolue, relative et d'entrainement (relation de transfert) ;
- Comprendre la notion de centre instantané de rotation ;
- Savoir déterminer la condition de roulement sans glissement ;
- Savoir déterminer la base et la roulante .

Exercice 1

On considère un cube de côtés $O_1A = O_1B = O_1C = 1$, en mouvement par rapport à un repère orthonormé direct fixe, R(O, x, y, z). A tout instant, les projections des vecteurs vitesses des points A, B et C sont telles que :

$$\vec{v}(A/R)\cdot\overrightarrow{O_1B} = 2\omega \text{ et } \vec{v}(A/R)\cdot\overrightarrow{O_1C} = \omega$$

$$\vec{v}(B/R)\cdot\overrightarrow{O_1A} = \omega \text{ et } \vec{v}(B/R)\cdot\overrightarrow{O_1C} = 0$$

$$\vec{v}(C/R)\cdot\overrightarrow{O_1A} = \omega \text{ et } \vec{v}(C/R)\cdot\overrightarrow{O_1B} = \omega$$

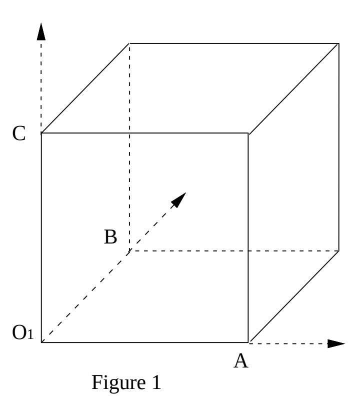


Figure 1

Soit $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ un repère lié au cube dans son mouvement par rapport à R avec $\vec{i}_1 = \overrightarrow{O_1A}$, $\vec{j}_1 = \overrightarrow{O_1B}$ et $\vec{k}_1 = \overrightarrow{O_1C}$ (voir figure 1).

1- Déterminer dans R, les vecteurs vitesses des points A, B et C. En déduire le vecteur $\vec{\Omega}(S/R)$ qui caractérise la rotation instantanée du cube par rapport à R.

2- Déterminer le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}(S/R)$ du cube par rapport à R. En déduire les vecteurs vitesses des points A, B et C.

3- Déterminer la vitesse du point O_1 par rapport à R, $\vec{v}(O_1/R)$.

4- Déterminer l'invariant scalaire I du torseur cinématique.

5- Calculer la vitesse $\vec{v}(M/R)$ d'un point M quelconque du cube. En déduire l'axe instantané de rotation.

Indication: *Tous les résultats doivent être exprimés dans la base de* R_1.

Corrigé

1- D'après les données, on peut écrire les vitesses sous la forme suivantes :

$$\vec{v}(A/R) = \Upsilon_A\vec{i}_1 + 2\omega\vec{j}_1 + \omega\vec{k}_1$$

$$\vec{v}(B/R) = \omega\vec{i}_1 + \Upsilon_B\vec{j}_1 + 0\vec{k}_1 \Rightarrow \vec{\Omega}(S/R)\left|\begin{array}{l} r_1 = 0 \\ r_2 = -\omega \\ r_3 = \omega \end{array}\right.$$

$$\vec{v}(C/R) = \omega(\vec{i}_1 + \vec{j}_1) + \Upsilon_C\vec{k}_1$$

Donc : $\vec{\Omega}(S/R) = \omega(-\vec{j}_1 + \vec{k}_1)$

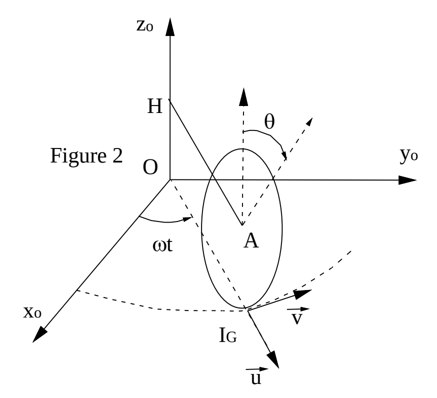
3- $\vec{v}(O/R) = \vec{v}(B/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{BO_1} = 2\omega\vec{i}_1 + \omega\vec{j}_1$

4- L'invariant scalaire $I = \vec{v}(B/R).\vec{\Omega}(S/R) = \text{cte} \neq 0$.

5- L'axe instantané de rotation est l'axe d'équation $z = -y - 2$ dans un plan ∥ à yOz coupant l'axe Ox en x=1/2.

Exercice 2

Un cerceau (C) de centre A et de rayon a, dont le plan est perpendiculaire à x_0Oy_0, roule sans glisser sur le plan horizontal (P). L'axe du cerceau reste parallèle à l'axe (OI_G) et le point de contact I_G décrit un cercle de rayon R avec une vitesse angulaire ω constante (figure 2). L'angle variable θ caractérise la rotation propre du cerceau autour de son axe. On désigne par $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ le repère fixe, $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_0)$ un repère intermédiaire et par $R(O, x, y, z)$ le repère lié à (P). On suppose que le plan (P) est fixe dans R_0. Soient I_1, I_2 et I_G les points de contact entre le cerceau et le plan (P) tels que $I_1 \in (C)$, $I_2 \in$ (P) et I_G point géométrique.



1- Calculer la vitesse $\vec{v}(A/R_0)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(A/R_0)$ du point A dans R_0.

2- Quel est le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}(C/R_0)$.

3- Donner les éléments de réduction du torseur cinématique en A. En déduire sa nature.

4- Calculer la vitesse $\vec{v}(I_1/R_0)$. En déduire la condition du roulement sans glissement.

5- Calculer les vitesses $\vec{v}(I_2/R_0)$ et $\vec{v}(I_G/R_0)$ ainsi que les accélérations $\vec{\gamma}(I_1/R_0)$, $\vec{\gamma}(I_2/R_0)$ et $\vec{\gamma}(I_G/R_0)$. Conclure.

6- Calculer la vitesse $\vec{v}(M/R_0)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/R_0)$du point M situé sur la périphérique du cerceau lors de son passage par le point le plus haut de (C).

7- Soit B un point appartenant à l'axe du cerceau et situé à une distance b de A. Sachant que B est lié à (C), calculer $\vec{v}(B/R_0)$. Pour quelle condition cette vitesse devient nulle.

8- En déduire l'axe central du torseur cinématique.

9- On suppose maintenant que le plan (P) tourne autour de la verticale avec une vitesse angulaire constante ω_0.

a- Calculer la vitesse $\vec{v}(A/R_0)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(A/R_0)$ en utilisant le théorème de composition des mouvements.

b- Déterminer le nouveau vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}(C/R_0)$.

Indication: *Tous les résultats doivent être exprimés dans la base* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_0)$

Corrigé

1-on a $\vec{v}(A/R) = \vec{v}(H/R) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{HA} = \omega R\vec{v}$

$$\vec{\gamma}(A/R) = -\omega^2 R\vec{u}$$

2- $\vec{\Omega}(C/R_0) = -\dot{\theta}\vec{u} + \omega\vec{k}_0$

3- $I = 0$ et $\vec{\Omega}(C/R_0) \neq \vec{0}$ ⇒un glisseur.

4- $\vec{v}(I_1/R) = (\omega R - a\dot{\theta})\vec{v}$

donc la C.R.S.G⇒ $\vec{v}(I_1/R) = \vec{0} \Rightarrow \omega R = a\dot{\theta}$

5- $\vec{v}(I_2/R_0) = \vec{0}$ et $\vec{v}(I_G/R_0) = R\omega\vec{v}$

$\vec{\gamma}(I_1/R_0) = -\omega^2 R\vec{u} + \dfrac{\omega^2 R^2}{a}\vec{k}_0$

$\vec{\gamma}(I_2/R_0) = \vec{0}$

$\vec{\gamma}(I_G/R_0) = -\omega^2 R\vec{u}$

c/c :

- Les points ont des vitesses instantanées identiques mais leurs accélérations sont différents.
- Généralement les trois points confondus à t donné ont des accélérations différentes.

6- $\vec{v}(M/R_0) = 2R\omega\vec{v}$

$\vec{\gamma}(M/R_0) = -3\omega^2 R\vec{u} - \omega R\dot{\theta}\,\vec{k}_0$

7- $\vec{v}(B/R_0) = (R - b)\omega\vec{v}$: cette condition devient nulle si $R = b$.

8- L'axe central passe par les points H et I_1 à t donné.

9- On prendra R lié au plan comme repère relatif :

a) $\vec{v}(A/R_0) = \vec{v}(A/R) + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{OA} = (\omega + \omega_0)R\vec{v}$

$$\vec{\gamma}(A/R_0) = \vec{\gamma}(A/R) + \vec{\gamma}_e(A) + \vec{\gamma}_c(A)$$

$$\vec{\gamma}(A/R) = -\omega^2 R\vec{u}$$

$$\vec{\gamma}_e(A) = -\omega^2 R\vec{u}$$

$$\vec{\gamma}_c(A) = -2\omega\omega_0 R\vec{u}$$

b) et $\vec{\Omega}(C/R_0) = \vec{\Omega}(C/R) + \vec{\Omega}(R/R_0) = ((\omega + \omega_0)\vec{k}_0 - \dot{\theta}\vec{u})$

Exercice 3

Un cerceau (C_1) de rayon a, dont le plan est vertical, roule sans glisser sur le plan horizontal (π). Le point de contact du cerceau avec le plan (π) décrit un cercle de rayon R avec une vitesse angulaire uniforme ($\dot{\theta} = Cte$). On désigne par $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ le repère lié à (π) et par $R_1(O_1, x_1, y_1, z_0)$ le repère en rotation autour de l'axe Oz_0 (*figure. 4a*). Le cerceau (C_1), dont le centre A_1 est lié à R_1, est en rotation autour de l'axe O_1x_1.

Soit I_1 ($I_1 \in (C_1)$) le point de contact du cerceau avec le plan (π) et I_{G1} le point de contact géométrique.

1- Déterminer les vecteurs rotations instantanées $\vec{\Omega}(C_1 / R_1)$ et $\vec{\Omega}(C_1 / R_0)$.

2- Calculer $\vec{v}(I_{G1} / R_0)$ et $\vec{v}(I_1 / R_0)$. En déduire la condition de roulement sans glissement.

3- Calculer les accélérations $\vec{\gamma}(I_{G1} / R_0)$ et $\vec{\gamma}(I_1 / R_0)$.

Au cerceau (C_1) on attache un deuxième cerceau (C_2) par une barre rigide A_1A_2 (A_1A_2 = L). Le système formé par (C_1), (C_2) et A_1A_2 forme un solide indéformable en rotation uniforme ($\dot{\theta} = Cte$) autour de l'axe Oz_0 (*figure. 4b*). Le cerceau (C_1) est en rotation autour de l'axe O_1x_1 de R_1 avec la vitesse angulaire $\vec{\Omega}(C_1 / R_1)$ et roule sans glisser sur (π).

4- Soit I_2 ($I_2 \in (C_2)$) le point de contact du cerceau (C_2) avec le plan (π) et I_{G2} est le point de contact géométrique.

a) Calculer les vitesses $\vec{v}(I_2 / R_0)$ et $\vec{v}(I_{G2} / R_0)$.

b) En déduire la vitesse de glissement de (C_2) sur (π).

c) Calculer les accélérations $\vec{\gamma}(I_2 / R_0)$ et $\vec{\gamma}(I_{G2} / R_0)$.

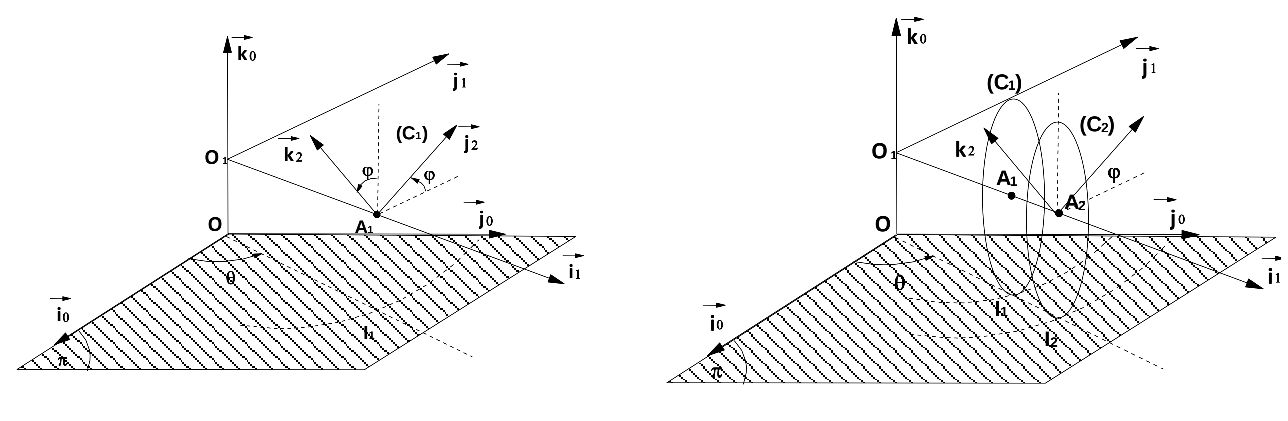


Figure 4a

Figure 4b

Corrigé

1- $\vec{\Omega}(C_1/R_1) = \dot{\varphi}\vec{i}_1$ et $\vec{\Omega}(C_1/R_0) = \dot{\varphi}\vec{i}_1 + \dot{\theta}\vec{k}_0$

2- $\vec{v}(I_{C1}/R_0) = R\dot{\theta}\vec{j}_1$ et $\vec{v}(I_1/R_0) = (R\dot{\theta} + a\dot{\varphi})\vec{j}_1$

Donc la condition de roulement sans glissement est donnée par : $R\dot{\theta} = -a\dot{\varphi}$

3- $\vec{\gamma}(I_{C1}/R_0) = -R\dot{\theta}^2\vec{i}_1$ et $\vec{\gamma}(I_1/R_0) = R\dot{\theta}^2\vec{i}_1 + \frac{R^2\dot{\theta}^2}{a}\vec{k}_0$

4- a) $\vec{v}(I_{C2}/R_0) = (R+L)\dot{\theta}\vec{j}_1$ et $\vec{v}(I_2/R_0) = ((R+L)\dot{\theta} + a\dot{\varphi})\vec{j}_1$

b) $\vec{v}_g(C_2/\pi) == ((R+L)\dot{\theta} + a\dot{\varphi})\vec{j}_1$

or la CRSG de C_1 donne : $R\dot{\theta} + a\dot{\varphi} = 0$

donc : $\vec{v}_g(C_2/\pi) = L\dot{\theta}\vec{j}_1$

c) $\vec{\gamma}(I_{C2}/R_0) = -(R+L)\dot{\theta}^2\vec{i}_1$ et $\vec{\gamma}(I_2/R_0) = -L\dot{\theta}^2\vec{i}_1$

Exercice 4

Soit $R_0(O,\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$ un repère fixe et Σ un système matériel constitué de deux solides (S_1) et (S_2) (Fig.2). (S_1) est une barre homogène OA tournant dans le plan horizontal $(O,\vec{i}_0,\vec{j}_0)$ à la vitesse angulaire ω autour de l'axe $(O,\vec{k}_0)$. (S_2) est un disque homogène, de rayon R et de centre C. (S_2) est assujetti à rester dans le plan vertical $(O,\vec{i}_1,\vec{k}_0)$ et à rouler sans glisser sur (S_1). On a

$\vec{OC} = R\vec{k}_0 + x\vec{i}_1$. $R_1(O,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_0)$ et $R_2(C,\vec{i}_2,\vec{j}_1,\vec{k}_2)$ sont deux repères respectivement liés à (S_1) et (S_2). La position du système dans R_0 est repérée par les angles : $\psi = (\vec{i}_0,\vec{i}_1)$ et $\theta = (\vec{i}_1,\vec{i}_2)$.

1) Donner les vitesses de rotation $\vec{\Omega}(S_1/R_0)$ et $\vec{\Omega}(S_2/R_1)$. En déduire $\vec{\Omega}(S_2/R_0)$.
2) Calculer les vitesses $\vec{V}(I_1 \in S_1/R_0)$; $\vec{V}(I_2 \in S_2/R_0)$ et $\vec{V}(I/R_0)$. I_1 et I_2 étant les points de contact de (S_1) et (S_2) respectivement et I le point géométrique de contact. Comparer les trois vitesses.
3) Calculer les accélérations $\vec{\gamma}(I_1 \in S_1/R_0)$; $\vec{\gamma}(I_2 \in S_2/R_0)$ et $\vec{\gamma}(I/R_0)$.
4) Exprimer la condition de roulement sans glissement de (S_2) sur (S_1).
5) Peut-on dire que le mouvement de (S_2) est plan dans le repère R_0.

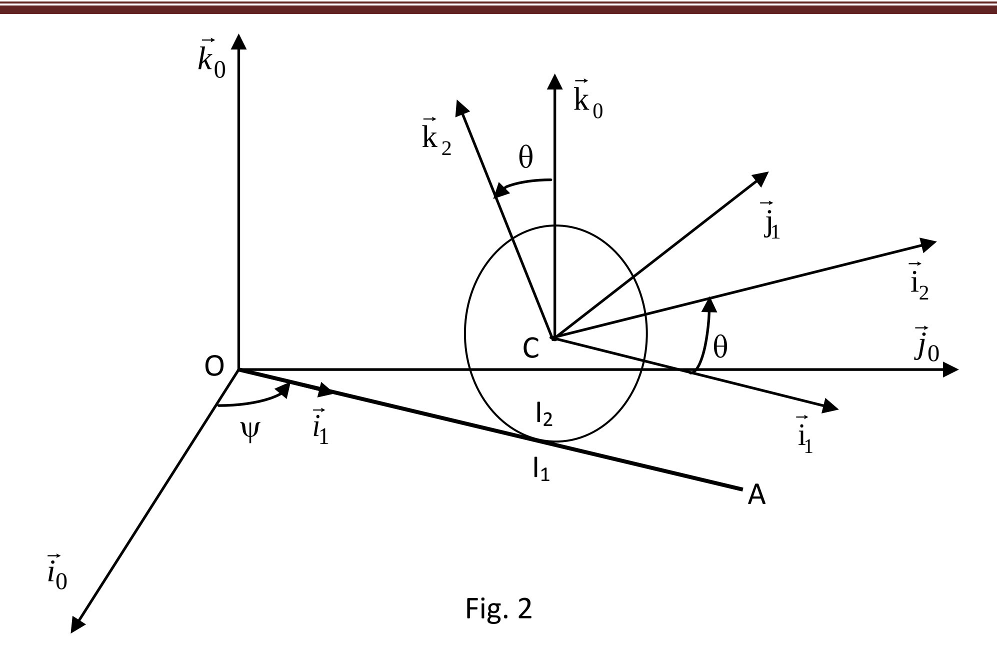


Fig. 2

Corrigé

1- $\vec{\Omega}(S_1/R_0) = \dot{\psi}\vec{k}_0$ et $\vec{\Omega}(S_2/R_1) = \dot{\theta}\vec{j}_1$

$\vec{\Omega}(S_2/R_0) = \vec{\Omega}(S_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\theta}\vec{j}_1 + \dot{\psi}\vec{k}_0$

2- $\vec{v}(I_1 \in S_1/R_0) = x\dot{\psi}\vec{j}_1$ et $\vec{v}(I_2 \in S_2/R_0) = \left(\dot{x} - R\dot{\theta}\right)\vec{\iota}_1 + x\dot{\psi}\vec{j}_1$

3- $\vec{\gamma}(I_1 \in S_1/R_0) = x\dot{\psi}\vec{j}_1 - x\dot{\psi}^2\vec{i}_1$

$\vec{\gamma}(I_2 \in S_2/R_0) = \left(\ddot{x} - x\dot{\psi}^2\right)\vec{i}_1 + (2\dot{x}\dot{\psi} - R\dot{\psi}\dot{\theta})\vec{j}_1$

$\vec{\gamma}(I/R_0) = \left(\ddot{x} - x\dot{\psi}^2\right)\vec{i}_1 + 2\dot{x}\dot{\psi}\vec{j}_1$

4- C.R.S.G est donnée par : $\dot{x} = R\dot{\theta}$

5- Mouvement plan dans la base R_1 et R_2.

Exercices complémentaires

Exercice 5

On considère une tige (T), de centre G, d'extrémités A et B et de longueur $2a$, en mouvement dans le plan x_0Oy_0. La tige est en mouvement de rotation, caractérisé par l'angle θ, dans le repère **relatif** $R_G(G, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$. Ce dernier est en translation rectiligne uniforme par rapport à un repère fixe $R_O(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$. On donne $\vec{v}(G/R_0) = v_0\vec{i}_0$ où v_0 est une constante positive. On définit $R(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_0)$ comme étant un repère lié à (T) avec $\vec{i}$ porté par AB (Fig. 3) et $(\vec{i}_0, \vec{i}) = \theta$.

1- a) Calculer et représenter les vitesses relatives des points A et B.

b) Représenter le champ des vitesses relatives de la tige et préciser sa nature.

2- a) Déterminer la vitesse d'entraînement d'un point quelconque de (T).

b) Représenter le champ des vitesses d'entraînement de (T) et préciser la nature du torseur associé.

3- En déduire la vitesse absolue du point A.

4- Calculer la vitesse absolue du point B en utilisant la relation de transfert.

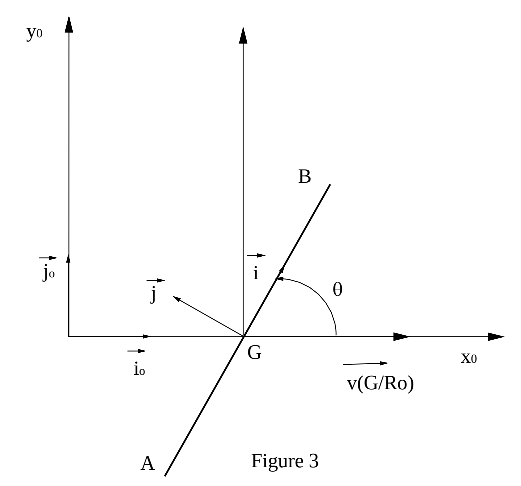


Figure 3

5- Déterminer géométriquement la position du centre instantané de rotation de (T) dans son mouvement par rapport à R_0.

Exercice 6

On considère deux disques D_1 et D_2, de rayons R_1 et R_2, en mouvement dans le plan vertical fixe xOy d'un repère R(O, x, y, z). Les deux disques sont superposés de telle sorte que leurs centres O_1 et O_2 restent sur la même verticale durant leurs mouvements (*figure 1*). On admet que les centres O_1 et O_2 ont la même vitesse [$\vec{v}(O_1/R) = \vec{v}(O_2/R) = v_0\vec{i}$]. Le contact entre D_1 et D_2 est ponctuel en H_1 ($H_1 \in D_1$) et H_2 ($H_2 \in D_2$). Le disque D_2 roule sans glisser sur D_1 et D_1 roule sans glisser sur l'axe horizontal Ox avec la vitesse angulaire $\vec{\Omega}(D_1/R) = \omega\vec{k}$. On définit I_1 comme étant le point de contact instantané de D_1 avec Ox ($I_1 \in D_1$).

1- Établir la condition de roulement sans glissement de D_1 sur Ox_l en fonction de ω, R_1 et v_0.

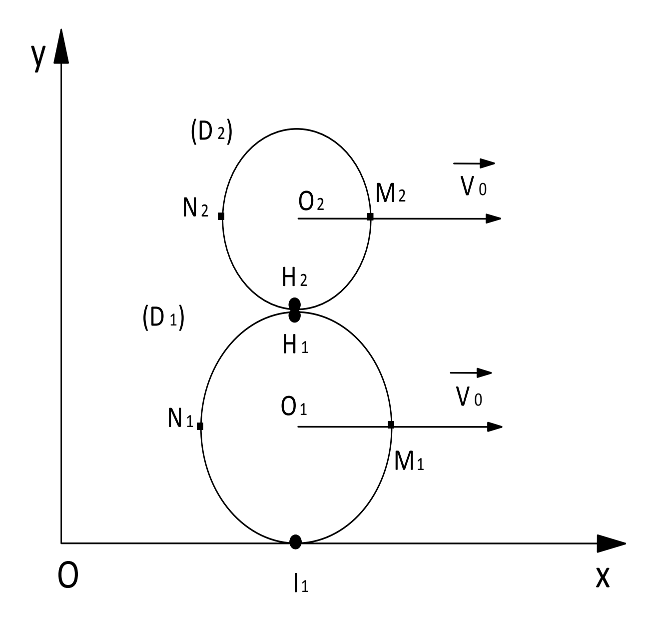
2- Sachant que le vecteur vitesse de rotation angulaire $\vec{\Omega}(D_2/\mathcal{R}) = \dot{\varphi}\vec{k}$ (φ étant l'angle qui caractérise la rotation de D_2 par rapport à R), déterminer, en utilisant la condition de roulement sans glissement de D_2 sur D_1, l'expression de $\dot{\varphi}$ en fonction de ω, R_1 et R_2.

3- Déterminer géométriquement la position du centre instantané de rotation du disque D_2.

4-Représenter géométriquement les vecteurs vitesses :
$\vec{v}(M_1/\mathcal{R}), \vec{v}(N_1/\mathcal{R}), \vec{v}(M_2/\mathcal{R})$, et $\vec{v}(N_2/\mathcal{R})$;

les points M_1, M_2, N_1 et N_2 étant indiqués sur la figure 1.

5- Indiquer la base et la roulante pour chacun des deux disques D_1 et D_2.



Exercice 7

On considère un système (S) formé de deux tiges homogènes OA et AB, identiques et de faibles sections. Chacune des deux tiges a une masse m et une longueur ℓ. Les deux tiges, articulées en A, sont en mouvement dans le plan xOy d'un repère R(O, x, y, z). Le point O est une articulation fixe dans le repère R $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les positions des tiges dans le plan xOy sont repérées par les angles α et β (*figure 2*). On désignera par $R_G(G_2, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère barycentrique d'origine G_2 (centre de masse de la barre AB), par $R_1(O, \vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{k})$ un repère lié à la barre OA et par $R_2(G_2, \vec{u}_2, \vec{v}_2, \vec{k})$ un repère lié à la barre AB.

Tous les résultats doivent être exprimés dans la base ($\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{k}$).

On suppose que $\alpha = \omega t$ et $\beta = 2\alpha$ (ω étant une constante).

1- Calculer :

a) Les vitesses $\vec{v}(A/\mathcal{R})$ et $\vec{v}(G_2/\mathcal{R})$.

b) Les accélérations $\vec{\gamma}(A/\mathcal{R})$ et $\vec{\gamma}(G_2/\mathcal{R})$.

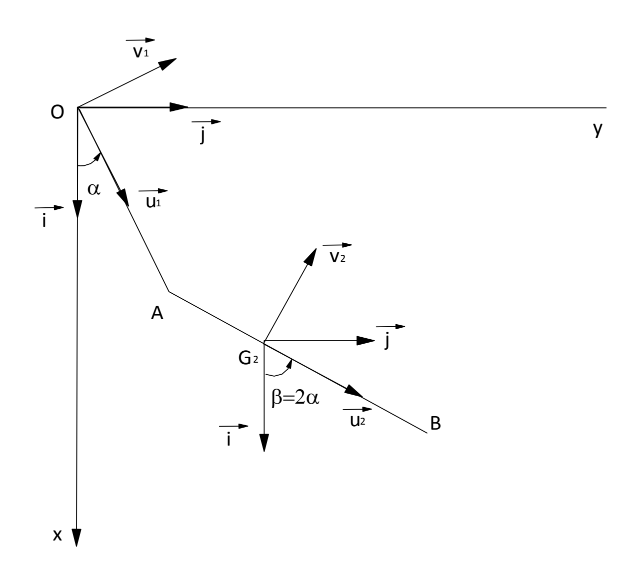
2- Montrer que :

$$\overrightarrow{OG_2} \wedge \vec{v}(G_2/R) = \frac{3}{2}\omega\ell^2(1+\cos\alpha)\vec{k} \text{ et } \overrightarrow{OG_2} \wedge \vec{\gamma}(G_2/R) = -\frac{3}{2}\omega^2\ell^2 \sin\alpha\vec{k}.$$

3- Déterminer les torseurs cinématiques de (OA) et (AB). Préciser leurs natures.

4- Déterminer les positions des centres instantanés de rotation des tiges (*OA*) et (*AB*).

5- Déterminer la base et la roulante pour la tige (AB).



Exercice 8

Une échelle double est formée de deux barres AB et AC, identiques et articulées en A. L'échelle repose sur l'axe Ox_0 avec une ouverture $C\hat{A}B = 2\alpha$ comme indiqué sur la figure 3. On désigne par R_0 (O, x_0, y_0, z_0) le repère absolu. Le système est en mouvement dans le plan vertical x_0Oy_0. Les point B et C glissent sur l'axe Ox_0 avec les vitesses respectives $\vec{v}(B/R_o)$ et $\vec{v}(C/R_o)$. Soit $R_1(O_1,x_1,y_1,z_1)$ un repère dont l'axe O_1y_1 est la médiatrice de l'échelle. La base $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ est associée aux deux repères R_0 et R_1.

On pose AB = AC = L

1- Trouver, en fonction de $\dot{\alpha}$, les vecteurs $\vec{\Omega}(AB/R_o)$ et $\vec{\Omega}(AC/R_o)$ caractérisant les rotations instantanées des barres AB et AC par rapport à $R_{0,}$ respectivement.

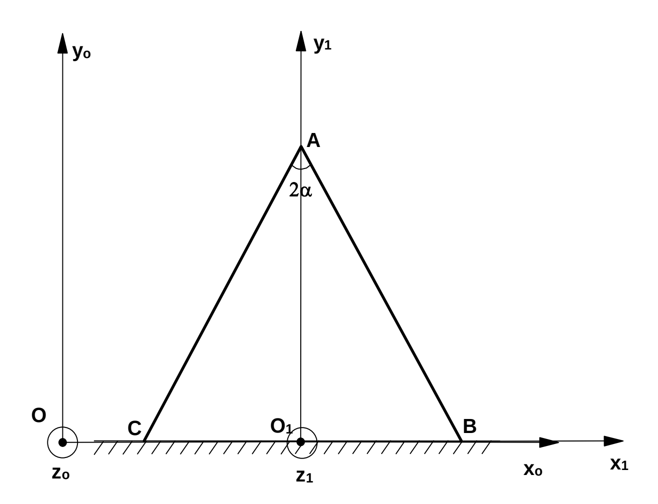
2- On donne $\vec{v}(B/R_o) = -\vec{v}(C/R_o) = v_o\vec{i}_0$

a) En utilisant la relation du torseur cinématique pour chacune des deux barres, trouver la relation liant $\dot{\alpha}, \alpha, L$ et v_o.

b) Déterminer la vitesse $\vec{v}(A/R_o)$ en fonction de $\dot{\alpha}, \alpha$ et L.

c) Déterminer géométriquement les positions des centres instantanés de rotation des barres AB et AC.

d) Déterminer (sans calcul) la base et la roulante pour chacune des deux barres.



3- On fixe le point C sur l'axe Ox de sorte que $\vec{v}(B/R_o) = v_o\vec{i}$ et $\vec{v}(C/R_o) = \vec{0}$. Trouver dans ce cas:

a) La vitesse du point A dans R_0 en fonction de $\dot{\alpha}, \alpha$ et L.

b) La relation liant $\dot{\alpha}, \alpha, L$ et v_o.

c) Les centres instantanés de rotation des barres AB et AC.

d) La vitesse du point O_1 dans R_0.

Exercice 9

Un cerceau (C) de centre A et de rayon *a*, dont le plan est vertical, roule sans glisser sur un plan horizontal (P). L'axe du cerceau reste parallèle à l'axe (O I_G) et le point de contact décrit un cercle de rayon R avec une vitesse angulaire ω constante (figure ??). L'angle variable θ caractérise la rotation du cerceau autour de son axe. On désigne par $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ le repère fixe et par $R(O, x, y, z)$ le repère lié à (P). On suppose que le plan (P) est fixe dans R_0. Soient I_1, I_2 et I_G les points de contact entre le cerceau et le plan (P) tels que : $I_1 \in (C)$, $I_2 \in (P)$ et I_G est le point géométrique.

1- Calculer la vitesse $\vec{v}(A/R_0)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(A/R_0)$ du point A dans R_0.

2- Quel est le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$ du cerceau dans R_0.

3- Donner les éléments de réduction du torseur cinématique en A. En déduire qu'il s'agit d'un glisseur.

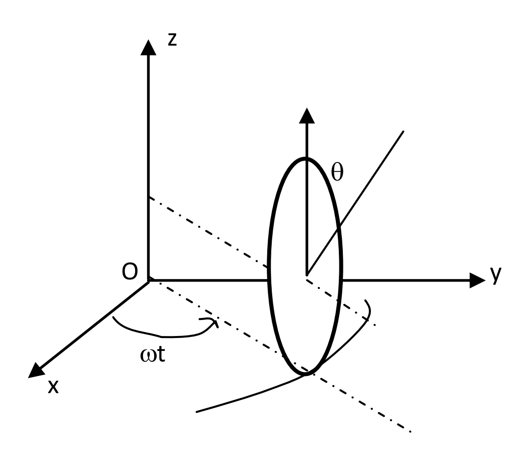
4- Calculer la vitesse $\vec{v}(I_1/R_0)$ et en déduire la condition du roulement sans glissement.

5- Calculer $\vec{v}(I_2/R_0)$ et $\vec{v}(I_G/R_0)$ et les accélérations $\vec{\gamma}(I_1/R_0)$, $\vec{\gamma}(I_2/R_0)$ et $\vec{\gamma}(I_G/R_0)$. Conclure.

6- Calculer la vitesse $\vec{v}(M/R_0)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/R_0)$ de son point le plus haut.

7- Soit B un point appartenant à l'axe du cerceau et situé à une distance b de A. Sachant que B est lié à (C), calculer $\vec{v}(B/R_0)$. Pour quelle condition cette vitesse devient nulle ?

8- En déduire l'axe central du torseur cinématique.



Exercice 10

Un solide (S) est constitué d'une barre (AB), de milieu G et de longueur 2*a*. Le solide (S) est en mouvement par rapport au repère orthonormé direct R_0 (O, $x_0y_0z_0$). Le repère R_0 est fixe et l'axe Oz_0 est vertical ascendant. L'extrémité B de (S) glisse sur le plan matériel x_0Oy_0 alors que l'extrémité A reste fixe sur l'axe matériel Oz_0. On donne OA = $a\sqrt{3}$. Un anneau (M), assimilé à un point matériel, se déplace sur la barre (AB). Il est repéré par le vecteur position $\overrightarrow{AM} = -\lambda(t)\,\vec{k}$. On désigne par R_1 ($(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_0)$ et R_2 $(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{k})$ les repères intermédiaire et lié au solide, respectivement.

1- a) Déterminer la vitesse de rotation $\vec{\Omega}(S/R_o)$ du solide par rapport à R_0.

b) Déterminer la vitesse $\vec{v}(G/R_o)$ du point G par rapport à R_0, en utilisant :

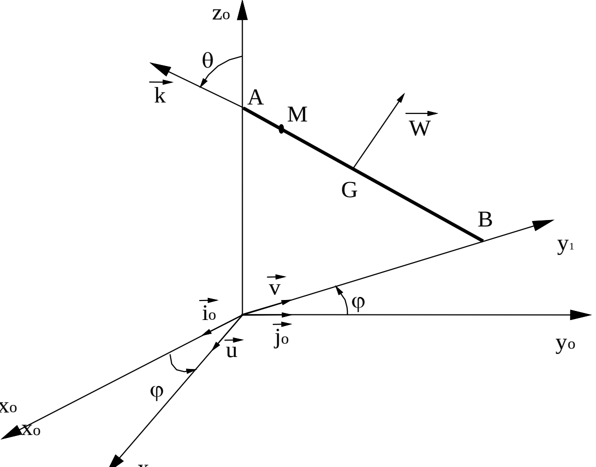
- la relation de transfert du torseur cinématique,
- le théorème de composition des mouvements.

c) Déterminer la vitesse $\vec{v}(B/R_o)$ du point B par rapport à R_0.

2- a) Calculer la vitesse $\vec{v}(M/R_2)$ du point M dans le repère R_2. En déduire l'accélération $\vec{\gamma}(M/R_2)$ de ce point dans le même repère.

b) Calculer la vitesse et l'accélération d'entraînement du point M (R_2 repère relatif) ainsi que son accélération de Coriolis.

c) En déduire la vitesse absolue $\vec{v}(M/R_o)$ du point M et son accélération absolue $\vec{\gamma}(M/R_0)$.



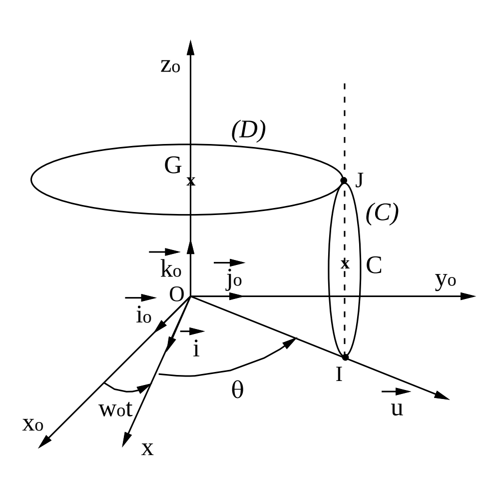
3- On suppose maintenant que l'extrémité B peut quitter le plan matériel x_0Oy_0.

a) Donner l'expression du vecteur vitesse rotation, $\vec{\Omega}(S/R_o)$, de (S) par rapport à R_0.

b) Déterminer l'expression du vecteur $\vec{v}(M/R_o)$.

Exercice 11

Un disque (D) de centre G et de rayon R tourne dans un plan horizontal autour de son axe (Oz_o) avec une vitesse angulaire constante ω. Il entraîne dans son mouvement un cerceau (C), de centre C et de rayon r, situé dans un plan vertical. Le cerceau est appuyé en J sur le disque (D) et en I sur le plan horizontal (P).



On définit les repères suivants :

$R_o(O,\vec{i}_o,\vec{j}_o,\vec{k}_o)$ repère fixe, $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ repère lié à (P), $R_1(G,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_o)$ repère lié à (D),

$R_2(C,\vec{i}_2,\vec{j}_2,\vec{u})$ repère lié à (C) et $R_3(C,\vec{u},\vec{v},\vec{k}_o)$ un repère intermédiaire.

Les angles θ, φ et ψ sont tels que: $\theta=(\vec{i},\vec{u})$, $\varphi=(\vec{v},\vec{i}_2)$ et $\psi=(\vec{i}_o,\vec{i}_1)=\omega t$.

On considère d'abord que le plan (P) est fixe dans dans R_o *(ω_0 = 0)*.

1- Donner les expressions des vecteurs rotations $\vec{\Omega}(D/R_o)$ *et* $\vec{\Omega}(R_3/R_o)$.

2- Calculer les expressions des vecteurs vitesse suivants :

$\vec{v}(C/R_3), \vec{v}(C/R_o), \vec{v}(I \in (C)/R_3)$, $\vec{v}(I \in (C)/R_o)$, $\vec{v}(J \in (D)/R_o)$ et $\vec{v}(J \in (C)/R_0)$.

3- En déduire les vitesses de glissement de (C) par rapport à (P) et par rapport à (D).

4- **Donner les conditions de roulement sans glissement aux points de contact.**
5- On suppose maintenant que le plan (P) est en rotation autour de Oz_o avec une vitesse angulaire constante ω_0 = *constante* $\neq$ *0*.

a) Calculer $\vec{v}(I \in (C)/(P))$ et $\vec{v}(J \in (C)/(D))$.

b) En déduire les nouvelles conditions de roulement sans glissement. Comparer les résultats obtenus avec ceux de la question **4)**.

Exercice 12

Un cône de demi-angle au sommet α est en contact, suivant l'une de ses génératrices **[**confondue avec $(O, \vec{i}_1)$ **]**, avec le plan xOy d'un repère fixe $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le cône, dont le sommet est fixé en O, effectue une rotation d'angle φ autour de Oz et une rotation propre d'angle θ autour de son axe Ox_2 de vecteur unitaire $\vec{i}_2$ (voir figure 2). On pose OC = *a*.

1- Calculer la vitesse de rotation $\vec{\Omega}$(cône/R).

2- Soit M (0, 0, z) un point assujetti à rester sur l'axe Oz. Déterminer la condition à satisfaire pour que M soit lié au cône.

3- Calculer la vitesse d'un point I de contact (I $\in$cône) en fonction de la distance OI.

4- Déterminer la condition de roulement sans glissement du cône et l'axe instantané de rotation (dans le cas de non glissement).

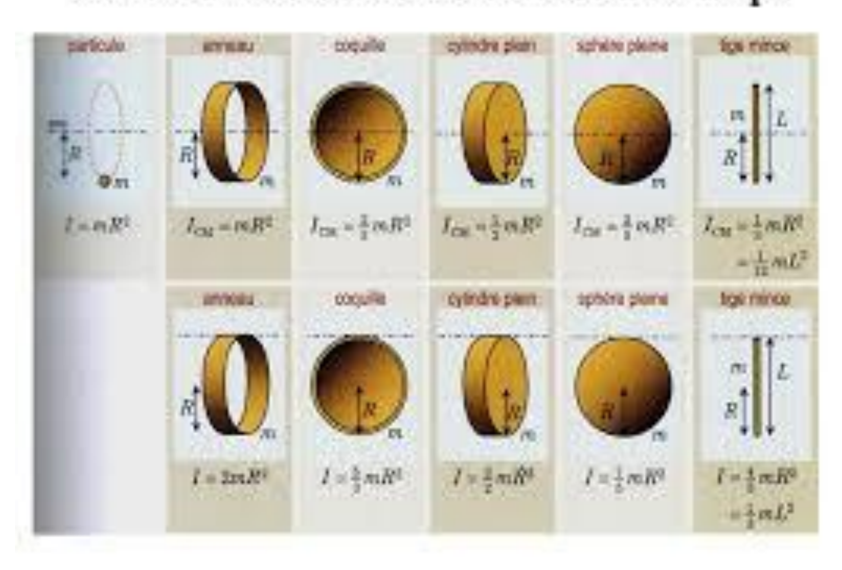
5- Calculer la vitesse du point C situé au milieu de la base du cône.

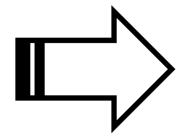
6- Soit I_G un point géométrique coïncidant avec le point de la base du cône qui est en contact avec le plan xOy. Comparer les vitesses $\vec{v}(I_G)$ et $\vec{v}(I \in \text{cône})$.

7- On suppose que le cône fait un angle variable avec le plan xOy. On pose $\Psi = (\vec{i}_1, \ \vec{i}_2)$, où $\vec{i}_1$ est la projection de $\vec{i}_2$ sur le plan xOy. Calculer $\vec{\Omega}$(cône/R) et la vitesse de C.



Moments d'inertie de différents corps





Géométrie des Masses


Руђер Бошковић (1711-1787)

Roger Josef Boscovich : (1711-1787)

Pour R.J. Boscovich, les corps ne sont continus qu'en apparence, en réalité, ils sont formés de points matériels isolés ; « un corps continus soit un concept intuitif, primitif, on peut toujours le penser comme un ensemble de points matériels, liés entre eux par des liens sans masse, de telle sorte que la masse totale soit la somme de la masse des tous les points, et que la forme, donc la disposition des ces points, soit garantie par le "squelette" des liens imaginaires ».

Objectifs :

- Déterminer la matrice d'inertie principale ;
- Savoir déterminer le repère et l'axe principal d'inertie ;
- Déterminer et différencier entre centre de masse et centre d'inertie ;
- Appliquer la notion de moment d'inertie ;
- Savoir appliquer le théorème de Guldin .

Exercice 1

Déterminer la matrice d'inertie des solides homogènes suivants:

a. Cylindre creux de rayons R_1, R_2 (rayons intérieur et extérieur) de hauteur H et de masse M.

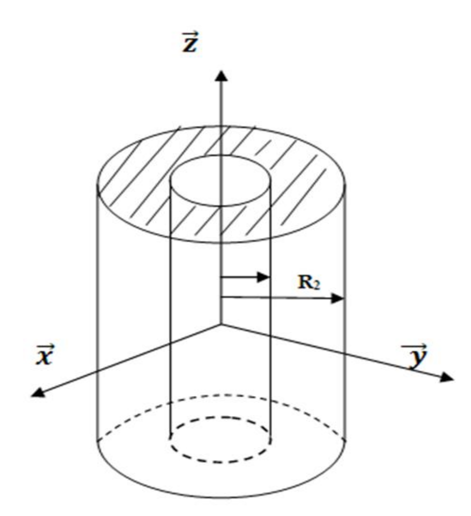
b. Cylindre mince de rayon R et d'épaisseur faible.

c. Cône creux de rayon R et de hauteur H.

d. Quart de cercle de rayon R.

corrigé :

a. Cylindre creux de rayons R_1, R_2 de hauteur H et de masse M :



Les trois plans sont des plans de symétrie matérielles et $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est une base principale d'inertie ⟹ la matrice d'inertie est diagonale

$II_{(S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$ avec : $A = B = \int (y^2 + z^2)dm = \frac{1}{2}C + \int (z^2)dm$

$$C = \int (y^2 + x^2)dm = \frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2)$$

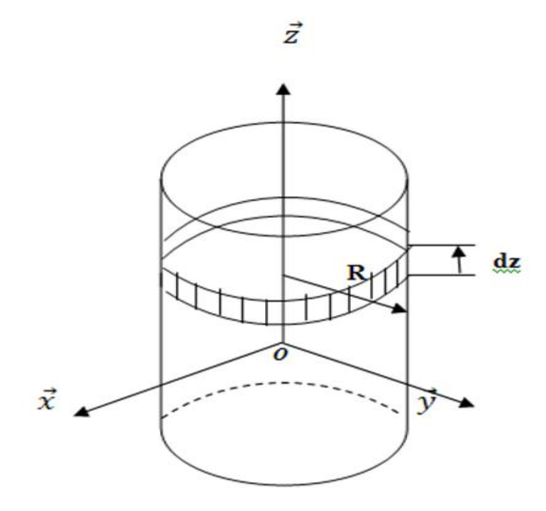
On a $\int (z^2)dm = \pi\rho(R_2^2 - R_1^2)\frac{H^3}{12} = \frac{MH^2}{12}$

Donc $A = B = \frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2) + \frac{MH^2}{12}$

Finalement la matrice s'écrit :

$$II_{(S)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2) + \frac{MH^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2) + \frac{MH^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2) \end{bmatrix}$$

b. Cylindre mince de rayon R et d'épaisseur faible :



$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est une base principale d'inertie ⟹ la matrice d'inertie est diagonale :

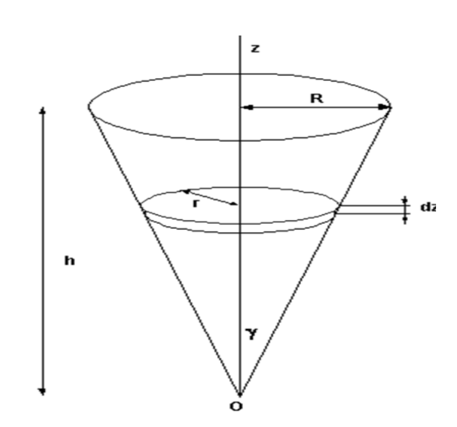
$$II_{(S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

$(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$ jouent le même rôle ⟹ $A = B$.

$A = B = \frac{MR^2}{2} + \frac{MH^2}{12}$ et $C = MR^2$

Finalement la matrice s'écrit : $II_{(S)} = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{2} + \frac{MH^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{2} + \frac{MH^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 \end{bmatrix}$

c. Cône creux de rayon R et de hauteur H :



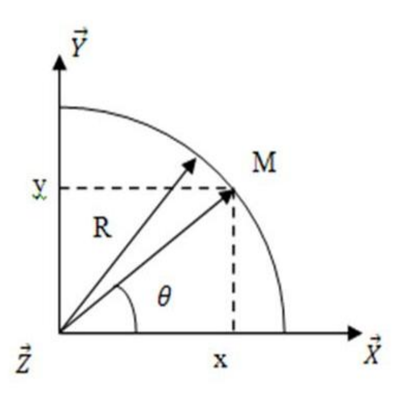
$(O,\vec{x},\vec{z})$ et $(O,\vec{y},\vec{z})$ deux plans de symétrie $\Longrightarrow(O,\vec{z})$ et $(O,\vec{x})$ sont deux axes principaux d'inertie. $\vec{x}\wedge\vec{y}=\vec{z}\Rightarrow(O,\vec{z})$est un axe principal d'inertie :

$$II_{(S)}=\begin{bmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{bmatrix}$$

Avec : $C=\frac{MR^2}{2}$ et $A=B=\frac{MR^2}{4}+\frac{MH^2}{2}$

Finalement la matrice s'écrit : $II_{(S)}=\begin{bmatrix}\frac{MR^2}{4}+\frac{MH^2}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{MR^2}{4}+\frac{MH^2}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2}\end{bmatrix}$

d) d. Quart de cercle de rayon R :



on a $z=0$ et $A=\int(y^2)dm$, $B=\int(x^2)dm$ et $C=\int(x^2+y^2)dm$

$$II_{(S)}=\begin{bmatrix}A & -F & 0\\ -F & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{bmatrix}$$

Avec $A=B=\frac{C}{2}=\frac{MR^2}{2}$ et $F=\frac{MR^2}{\pi}$

Finalement la matrice s'écrit : $II_{(S)}=\begin{bmatrix}\frac{MR^2}{2} & -\frac{MR^2}{\pi} & 0\\ -\frac{MR^2}{\pi} & \frac{MR^2}{2} & 0\\ 0 & 0 & MR^2\end{bmatrix}$

Exercice 2

Calculer le moment d'inertie :

1- d'une plaque rectangulaire homogène par rapport au côté AB.

2- d'une sphère homogène de rayon R par rapport à son centre O, en déduire la matrice d'inertie en O de la sphère.

Corrigé

1- Le moment d'inertie par rapport au côté AB est donné par :

$$I_{AB} = \int_{(S)} \left(\vec{x} \wedge \overrightarrow{AP}\right)^2 dm \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{AP} = x\,\vec{x} + y\,\vec{y}$$

$$I_{AB} = I_{xx} = \int_{(S)} \sigma\, y^2 dS = \int_0^a\!\!\int_0^b \sigma\, y^2 dx\,dy = \frac{\sigma}{3} a\, b^3. \text{ Or } m = \int_{(S)} dm = \int_{(S)} \sigma\, dS = \sigma\, ab.$$

Ainsi, $I_{AB} = \frac{m}{3} b^2$.

2- Le moment d'inertie par rapport à O :

$$I_O = \int_{(S)} \overrightarrow{OP}^2 dm \quad \text{or } \overrightarrow{OP} = r\,\vec{e}_r,\ dm = \rho\, dV \text{ et } dV = r^2 \sin(\varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$I_0 = \int_0^R\!\!\int_0^\pi\!\!\int_0^{\pi/2} \rho\, r^4 \sin(\varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{4}{5}\rho\,\pi\, R^5$$

La masse de la sphère est $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$.

Ainsi, $I_0 = \frac{3}{5} m R^2$.

A cause des symétries de la sphère: $I_{Ox} = I_{Oy} = I_{Oz}$.

Or $2I_O = I_{0x} + I_{0y} + I_{0z} = 3I_{Ox} \Rightarrow I_{Ox} = \frac{2}{3} I_O = \frac{2}{5} M\, R^2$.

La matrice d'inertie par rapport à O est donnée par :

$$[I]_O = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} M\,R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} M\,R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} M\,R^2 \end{bmatrix}$$

Exercice 3

On considère le triangle rectangle homogène plein ABC d'épaisseur négligeable. On pose $\overrightarrow{AB} = 2a\,\vec{x}$ et $\overrightarrow{BC} = 2b\,\vec{y}$. On demande de déterminer :

1- les coordonnées dans le repère $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ du centre d'inertie G du triangle ABC.

2- la matrice d'inertie de ce triangle en A sur la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,

3- déduire la matrice d'inertie en G sur la base ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$).

Corrigé

1- La masse du triangle est donnée par :

$$m = \sigma \int_0^{2a} \int_0^{\frac{b}{a}x} dx\, dy = 2\sigma a b$$

Le centre de masse du triangle est donné par :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \int_0^{2a} \int_0^{\frac{b}{a}x} \sigma (x\,\vec{x} + y\,\vec{y})\, dx\, dy = \frac{\sigma}{m}\left[\frac{8}{3}a^2 b\,\vec{x} + \frac{4}{3}a b^2\,\vec{y}\right] = \frac{4}{3}a\,\vec{x} + \frac{2}{3}b\,\vec{y}\,.$$

2- Puisque le triangle admet une épaisseur négligeable $z = 0$ alors $I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = 0$.

$$I_{xx} = \int_{(S)} y^2 dm = \int_0^{2a} \int_0^{\frac{b}{a}x} \sigma\, y^2 dx\, dy = \frac{4}{3}\sigma b^3 a = \frac{2}{3} m b^2\,.$$

$$I_{yy} = \int_{(S)} x^2 dm = 2 m a^2\,.$$

$$I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2)\, dm = I_{xx} + I_{yy} = 2m(a^2 + \frac{b^2}{3})$$

$$I_{xy} = \int_{(S)} xy\, dm = 2\sigma a^2 b^2 = m a b = I_{yx}\,.$$

La matrice d'inertie par rapport à A est donnée par :

$$[I]_O = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}mb^2 & -mab & 0 \\ -mab & 2ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m(a^2 + \frac{b^2}{3}) \end{bmatrix}$$

3- La position du centre de masse G est donnée par $x_G = \frac{4}{3}a$ et $y_G = \frac{2}{3}b$. La matrice d'inertie par rapport au centre de masse G peut se calculer comme suit :

$$I_{xx}^G = I_{xx}^O - m\, y_G^2$$
$$I_{yy}^G = I_{yy}^O - m\, x_G^2$$
$$I_{zz}^G = I_{zz}^0 - m(x_G^2 + y_G^2)$$
$$I_{xy}^G = I_{xy}^0 - m\, x_G y_G$$

La matrice d'inertie par rapport à G est :

$$[I]_G = \begin{bmatrix} I_{xx}^G & -I_{xy}^G & 0 \\ -I_{xy}^G & I_{yy}^G & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9}m b^2 & -\frac{m}{9}ab & 0 \\ -\frac{m}{9}ab & \frac{2}{9}m a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9}m(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

Exercice 4

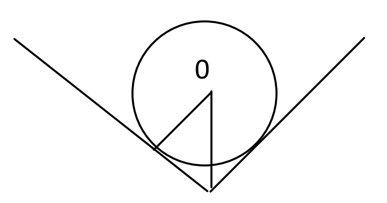
Une sphère homogène de rayon a et de centre O roule sans glisser au fond d'une cornière en forme de V majuscule, d'angle dièdre 120° et de plan bissecteur vertical (figure 3).

1- Déterminer les éléments de réduction du torseur cinématique en O.

2- Montrer que H est un C.I.R

3- Déterminer la condition de roulement sans glissement de la sphère sur le dièdre.

4- Déterminer l'axe instantané de rotation.



Corrigé

1- $I = \vec{\Omega}(S/R).\vec{V}(H/R) = 0$

2- HK

3- $\vec{V}(M/R) = \vec{V}(H/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{HM} \Rightarrow \vec{V}(M/R) \in xOz \Rightarrow$mouvement plan dans R.

4- C.R.S.G$\Rightarrow \vec{V}(M/R) = \vec{V}(H/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{HM} = \vec{0}$ donc $\vec{\Omega}(S/R) = \frac{v_0}{a sin\alpha}\vec{j}$

Exercice 5

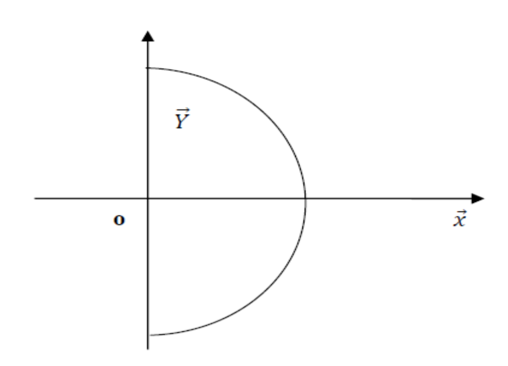
Déterminer la matrice principale et centrale d'inertie des solides homogènes suivants:

a. Demi cercle de masse M et de rayon R.

b. Demi disque de masse M et de rayon R.

corrigé :

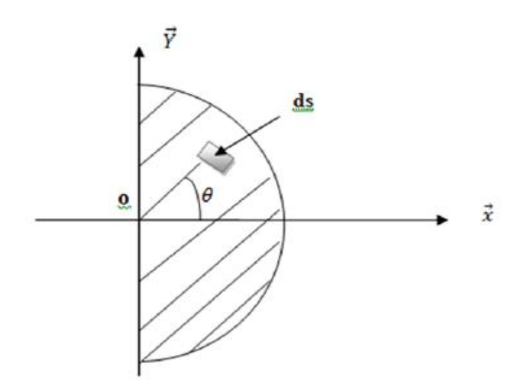
a) Demi cercle de masse M et de rayon R :



La matrice centrale d'inertie s'écrit : $II_{(S)} = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{2} - \frac{4MR^2}{\pi^2} & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 - \frac{4MR^2}{\pi^2} \end{bmatrix}$

et la matrice principale d'inertie s'écrit : $II_{(S)} = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 \end{bmatrix}$

b. Demi disque de masse M et de rayon R :



la matrice principale d'inertie s'écrit : $II_{(S)} = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix}$

et la matrice centrale d'inertie s'écrit : $II_{(S)} = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} - M(\frac{4R}{3\pi})^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} - M(\frac{4R}{3\pi})^2 \end{bmatrix}$

Exercice 6

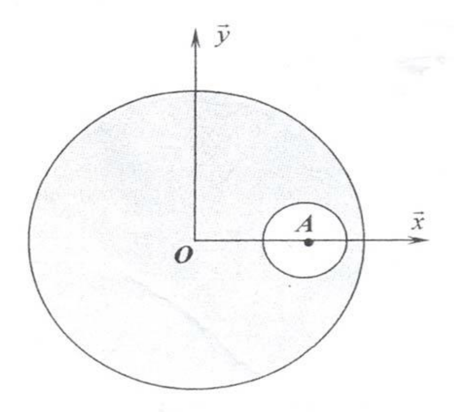
Le volant représenté figure est caractérisé par sa masse m et son rayon R. Il comporte un trou circulaire centré en A (OA = a) et de rayon r.

1- Déterminer le centre d'inertie G du volant.

2- Calculer la matrice d'inertie au point O.

3- En déduire la matrice d'inertie au centre d'inertie G.

4- Calculer son moment d'inertie par rapport à la première bissectrice.



corrigé :

1- $\overrightarrow{OG} = -\frac{ar^2}{R^2-r^2}$

2- $(O,\vec{x},\vec{z})$ est un axe de symétrie $\Longrightarrow$ $(O,\vec{y})$ est un axe principal de symétrie

$\Longrightarrow$ F = D = 0

On a z = 0 $\Longrightarrow$ E = 0

$$II_{(S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} = II_1 - II_2$$

Avec II_1 : Matrice d'inertie du disque plein de rayon R.

II_2 : Matrice d'inertie du disque (supposé plein) de rayon r.

Finalement la matrice s'écrit : $II_{(S)} = \begin{bmatrix} \frac{M(R^2+r^2)}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M(R^2+r^2)}{4} - \mathrm{M}\ \frac{a^2r^2}{R^2-r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M(R^2+r^2)}{4} - \mathrm{M}\ \frac{a^2r^2}{R^2-r^2} \end{bmatrix}$

3- Matrice d'inertie au centre d'inertie G :

$$II_{(S)_G} = \begin{bmatrix} \frac{M(R^2+r^2)}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M(R^2+r^2)}{4} - \mathrm{M}\ \frac{a^2r^2}{R^2-r^2} - \mathrm{M}\ (\frac{ar^2}{R^2-r^2})^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M(R^2+r^2)}{4} - \mathrm{M}\ \frac{a^2r^2}{R^2-r^2} - \mathrm{M}\ (\frac{ar^2}{R^2-r^2})^2 \end{bmatrix}$$

4- Moment d'inertie par rapport à la première bissectrice :

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a : $I_{(S/\Delta)} = t_{\vec{u}}.I_{(S_0)}.\vec{u} = \frac{M(R^2+r^2)}{4} - \mathrm{M}\ \frac{a^2r^2}{R^2-r^2}$

Exercice 7

Un solide (S) homogène de masse M est constitué par un cylindre plein de hauteur H, de rayon R et par une demi sphère pleine de rayon R. Le cylindre et la demi sphère sont assemblés par soudure comme l'indique la figure.

1- Expliquer pourquoi le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est principal d'inertie?

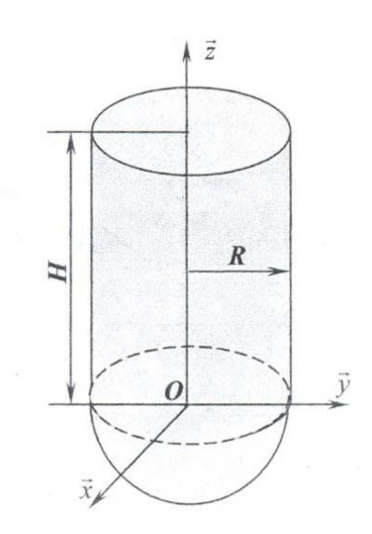
2- Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.

3- Déterminer la matrice d'inertie en 0, relativement à la base $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

4- En déduire, dans la même base la matrice principale et centrale d'inertie du solide.

corrigé :

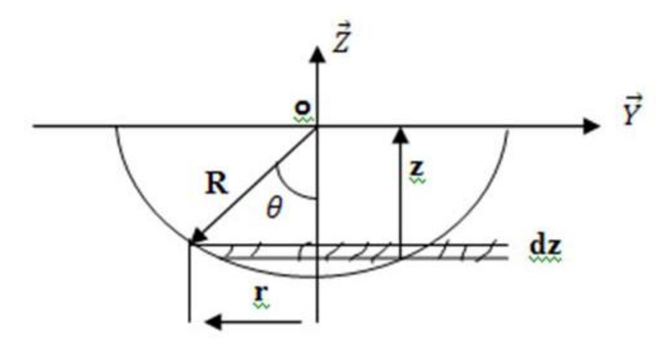
1-



$(O, \vec{x}, \vec{z})$ et $(O, \vec{y}, \vec{z})$ sont deux plans de symétrie matérielle

$\Rightarrow (O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$ sont deux axes principaux d'inertie

Le troisième axe : $\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z} \Rightarrow (O, \vec{z})$ est le 3ème axe principal $\Rightarrow$ la base $(O, \vec{y}, \vec{z})$ est une base principale d'inertie



2- La position du centre d'inertie G du solide :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3(2R^2H^2 - R^4)}{4(3R^2H + 2R^3)}\vec{z}$$

3- La matrice d'inertie en 0, relativement à la base $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$:

$$II_{(S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} = II_1 + II_2$$

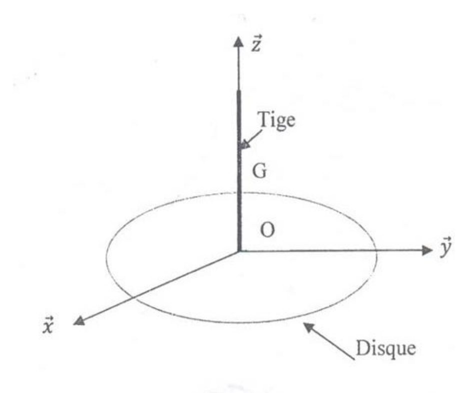
$$II_{(S)} = \begin{bmatrix} \frac{3M}{3H+2R}(\frac{HR^2}{4} + \frac{4R^3}{15} + \frac{H^3}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3M}{3H+2R}(\frac{HR^2}{4} + \frac{4R^3}{15} + \frac{H^3}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3M}{3H+2R}(\frac{HR^2}{2} + \frac{4R^3}{15}) \end{bmatrix}$$

4- La matrice centrale d'inertie du solide :

$$II_{(S)} = \begin{bmatrix} A_G & 0 & 0 \\ 0 & B_G & 0 \\ 0 & 0 & C_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_G = A - M_G^2 & 0 & 0 \\ 0 & B_G = B - M_G^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_G = C \end{bmatrix}$$

Exercice 8

Soit un solide (S) constitué d'un disque (D) de masse M et de rayon R et d'une tige (T) de même masse M et de longueur 2L. La tige est soudée au centre 0 du disque comme l'indique la figure suivante :



1- Déterminer de la matrice d'inertie du disque.

2- Déterminer la matrice d'inertie de la tige.

3- Déterminer la matrice d'inertie du solide (S).

corrigé :

1- La matrice d'inertie du disque est donnée par :

$$II_{(Disque\ )} = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix}$$

2- La matrice d'inertie de la tige est donnée par :

$$II_{(Tige)} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}\mathrm{ML}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}\mathrm{ML}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3- La matrice d'inertie du solide (S) : Disque+Tige

$$II_{(S)} = II_{(Disque)} + II_{(Tige)} = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4} + \frac{4}{3}\mathrm{ML}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} + \frac{4}{3}\mathrm{ML}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix}$$

Exercice 9

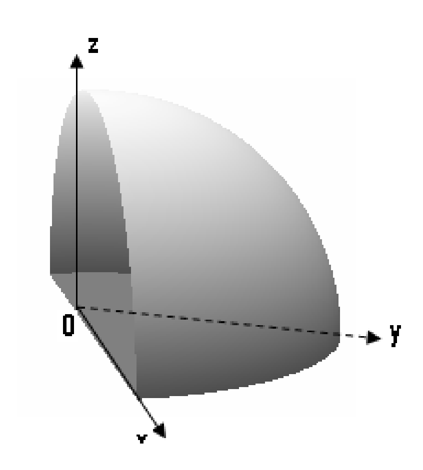
L'espace étant rapporté à un repère , on considère un quart de sphère homogène S, de centre O, de masse volumique et de rayon R.

1- Déterminer la masse de S.

2- Déterminer la position de son centre d'inertie G.

3- Déterminer en O la matrice d'inertie de S, en projection sur le repère .

4- Déterminer en G la matrice d'inertie de S, en projection sur le repère .



corrigé :

1- La Le quart de la sphère est défini par $\left\{(r,\theta,\varphi)/0 \le r \le R, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

Ainsi sa masse est $M = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \rho r^2 \sin(\varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{\pi}{3}\rho R^3$.

2- Par symétrie le centre de masse G appartient à l'intersection du plan $x = 0$ et de la droite (bissectrice) $y = z$. Par conséquent, $x_G = 0$ et $y_G = z_G$.

$$y_G = \overrightarrow{OG}\cdot\vec{y} = \frac{1}{M}\int_{(S)} y \cdot dm = \frac{1}{M}\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \rho r^3 \sin(\theta)\sin(\varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{3}{8}R$$

$$z_G = \overrightarrow{OG}\cdot\vec{z} = \frac{1}{M}\int_{(S)} z \cdot dm = \frac{1}{M}\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \rho r^3 \sin(\varphi)\cos(\varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{3}{8}R$$

Ainsi la position du centre de masse G est donnée par : $\overrightarrow{OG} = \frac{3}{8}R(\vec{y}+\vec{z})$.

3- La matrice d'inertie peut être calculée en utilisant les définitions des moments d'inertie et les produits d'inertie en coordonnées sphériques. Comme exemple :

$$I_{xx} = \int_{(S)} (y^2+z^2)\, dm = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \rho r^4 \left[\sin^2(\varphi)\sin^2(\theta) + \cos^2(\varphi)\right]\sin(\varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{2}{5}M R^2.$$

Puisque le plan $x = 0$ est un plan de symétrie, alors tous les produits d'inertie relatifs à x sont nuls : $I_{xy} = I_{yx} = I_{xz} = I_{zx} = 0$.

La matrice d'inertie en O s'écrit :

$$[I]_O = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}MR^2 & -\frac{2}{5\pi}MR^2 \\ 0 & -\frac{2}{5\pi}MR^2 & \frac{2}{5}MR^2 \end{bmatrix} = \frac{2}{5}MR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/\pi \\ 0 & -1/\pi & 1 \end{bmatrix}$$

4- En utilisant le théorème des axes parallèles, on peut exprimer la matrice d'inertie en G. Comme exemple :
$I_{xx} = I_{xx}^G + m(y_G^2 + z_G^2)$ et $I_{yz} = I_{yz}^G + m\, y_G z_G$.

La matrice d'inertie en G s'écrit :

$$[I]_G = \begin{bmatrix} \frac{19}{160}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{83}{320}MR^2 & MR^2(\frac{9}{64}-\frac{2}{5\pi}) \\ 0 & MR^2(\frac{9}{64}-\frac{2}{5\pi}) & \frac{83}{320}MR^2 \end{bmatrix}$$

Exercices complémentaires

Exercice 10

On considère un cube plein homogène, *C*, de côté 2*a* et de masse m et un repère R $(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont l'origine coïncide avec le centre de masse du cube. On ajoute deux masselottes identiques A et B de masse $\frac{m}{4}$ chacune sur les milieux de deux arêtes du cube diamétralement opposées (*figure 1*).

1- Déterminer la matrice d'inertie du cube en G, II(G, *C*).

2- Déterminer les matrices d'inertie en G des deux masselottes, II(G, A) et II(G, B).

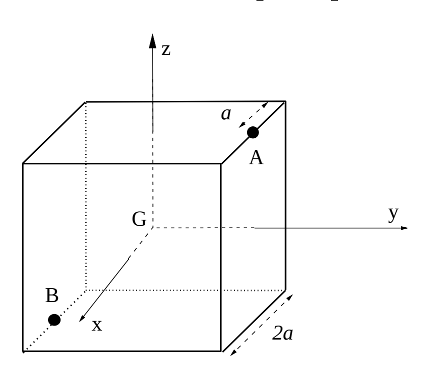
3- En déduire la matrice d'inertie en G, II(G, S), du système formé par le cube et les deux masselottes.

4- Le repère R est-il un repère principal d'inertie? Admet-il un axe principal d'inertie? Justifier votre réponse.

5- Trouver un repère principal d'inertie pour (S).

6- Diagonaliser la matrice et retrouver le repère principal d'inertie.

7- Déterminer la matrice principale d'inertie.



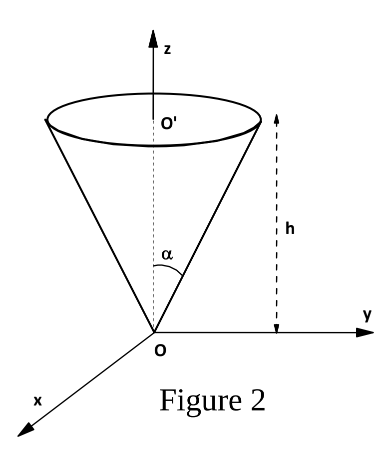


Figure 2

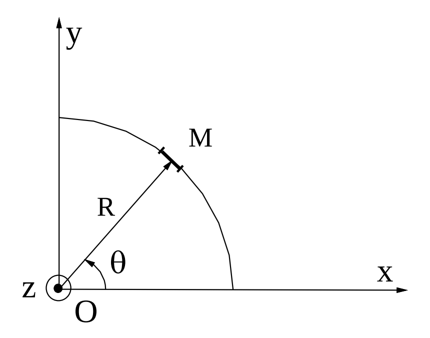
Exercice 11

Soit un quart de cercle matériel de rayon R dont la matrice d'inertie II(O, S) n'a pas été trouvée diagonale.

1- Déterminer la matrice d'inertie de (S), commenter.
2- Trouver un repère principal d'inertie pour (S)

3- Diagonaliser la matrice et retrouver le repère principal d'inertie pour le quart de cercle homogène.

4- Déterminer la matrice principale d'inertie.



Exercice 12

1- Déterminer les centres de masse et les matrices d'inertie en O des corps homogènes suivants :

a) Une demi sphère creuse de rayon R et de masse m (Figure 3).

b) Une sphère creuse de rayon R et de masse m.

c) Un quart de plaque elliptique homogène (Figure 4).

2- Calculer les moments d'inertie I_Δ de la demi sphère, de la sphère et de l'élément elliptique par rapport à un axe Δ passant par O et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.

3- En déduire les moments d'inertie $I_{\Delta G}$ de la demi sphère et de l'élément elliptique par rapport aux axes passant par leurs centres de masse et parallèle à Δ.

Exercice 13

On considère un solide (C) représentant un cylindre creux, homogène, de masse m, de rayon R, de centre de masse G et de hauteur h (Figure 5).

1- Déterminer la matrice d'inertie, II(G, C), en G du cylindre creux. En déduire la matrice d'inertie II(O, C).

2- L'opérateur d'inertie du cylindre peut-il devenir sphérique ? Justifier votre réponse.

3- Sur la périphérie du cylindre on soude une masselotte A de masse $\frac{m}{4}$, située sur l'axe Gy.

Le système constitué par le cylindre creux et la masselotte A forme un solide (S).

a) Donner la matrice d'inertie en O de A, II(O, A). En déduire II(O, S).

b) Trouver II(G, S).

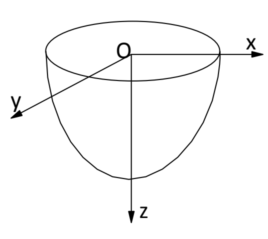
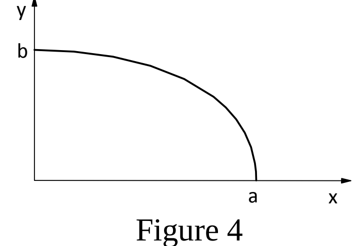


Figure 3



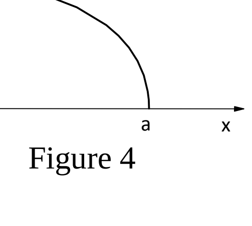


Figure 4

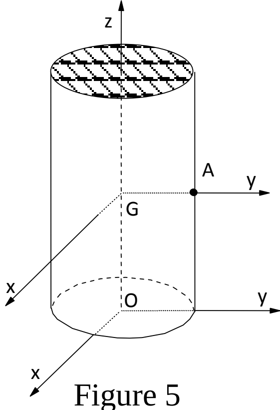


Figure 5

Exercice 14

1 - Déterminer les centres de masse et les matrices d'inertie en O des corps homogènes suivants :

a) Une demi sphère creuse de rayon r et de masse m (figure 4).

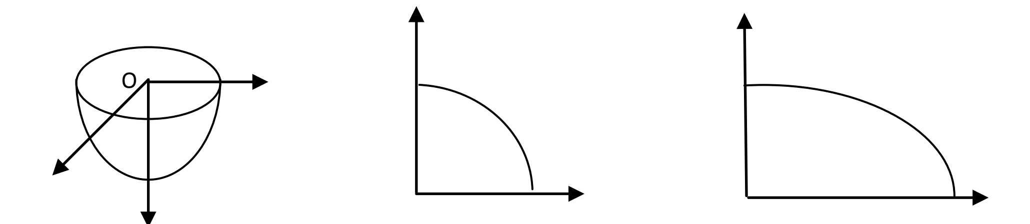
b) Une sphère creuse de rayon r et de masse m.

c) Un quart de cercle matériel de rayon r et de masse m (figure 5).

d) Un cercle matériel de rayon r et de masse m.

En déduire le moment d'inertie I_Δ du quart cercle par rapport à un axe Δ passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 1, 0)$.

e) Même question pour un quart de plaque elliptique (figure 6). En déduire le moment d'inertie I_Δ de la plaque par apport à l'axe Δ passant par O, de vecteur unitaire $\vec{u}$.



Exercice 15

On considère un solide (C) représentant un cylindre creux, homogène, de masse m, de rayon R, de centre de masse G et de hauteur h.

1- Déterminer la matrice d'inertie, II(G, C), en G du cylindre creux. En déduire la matrice d'inertie II(O, C).

2- L'opérateur d'inertie du cylindre peut-il devenir sphérique ? Justifier votre réponse.

3- Sur la périphérie du cylindre on soude une masselotte A de masse $\frac{m}{4}$, située sur l'axe Gy.

Le système constitué par le cylindre creux et la masselotte A forme un solide (S).

a) Donner la matrice d'inertie en O de A, II(O, A). En déduire II(O, S).

b) Trouver II(G, S).

Exercice 16

On considère un cône plein, homogène, de demi-angle au sommet α et de hauteur h. Le repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est tel que l'axe du cône coïncide avec l'axe (Oz). Le sommet du cône est placé en O.

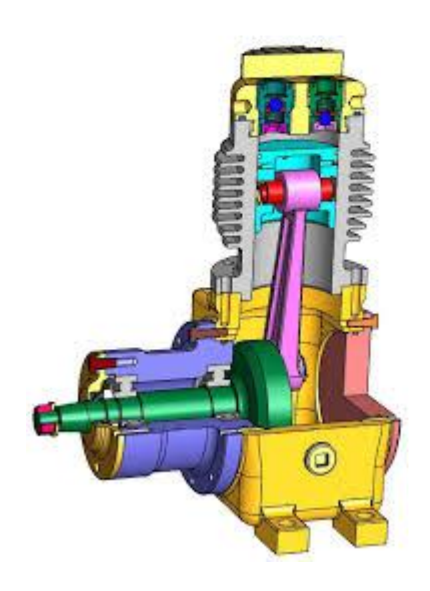
1- Trouver la position du centre de masse du cône et sa matrice d'inertie dans le repère R $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2- Calculer le moment d'inertie du solide par rapport à un diamètre de sa base, puis par rapport à un axe passant par les points O et B(0, a, a).

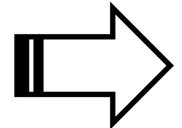
3- Soit A un point de coordonnées (0, a, 0). Déterminer la matrice d'inertie du cône au point A dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. En déduire le moment d'inertie du solide par rapport à un axe passant par les points A et C(a, 0, 0).

4- En faisant tendre l'angle α vers 0, le cône tend vers une tige non homogène avec une densité de masse linéique, λ, fonction de la hauteur z. Calculer λ en fonction de z et déterminer la matrice d'inertie de la tige au point O. Comparer le résultat obtenu avec celui de la question **1)** en supposant que α est petit.





Système de freinage



Cinétique du Solide



Johan Samuel König (Koenig) : (1712-1757)

Les travaux de Koening publié dans son livre " Elément de géométrie contenant les six premiers livres d'Euclide ", permettent le rapprochement des concepts de la cinématique (vitesse, accélération) et ceux de la géométrie des masses (centre de masse, moment d'inertie) donnant naissance à La **cinétique** (appellée aussi cinématique des masses).

Objectifs :

- Développer la notion du Torseur cinétique (quantité de mouvement, moment cinétique) ;
- Développer la notion du Torseur dynamique (quantité d'accélération, moment dynamique) ;
- Assimiler la notion de référentiel barycentrique ;
- Appliquer le théorème de Koenig ;

Exercice 1

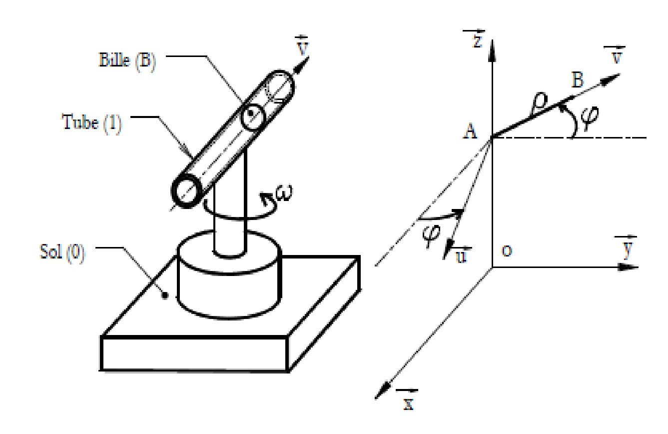
On défini par :

R_0 (O, x, y, z) Un repère de référence Lié au sol .

R_1 (A, u, v, z) un repère lié au tube.

Point B caractérise la bille.

ω : Vitesse angulaire du repère R_1/R_0



La bille glisse dans le tube à la vitesse $\vec{V}$ et Le tube tourne à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$

1- Calculons la vitesse $\vec{V}(B/R_0)$.

2- Accélération de $\vec{\gamma}(B/R_0)$.

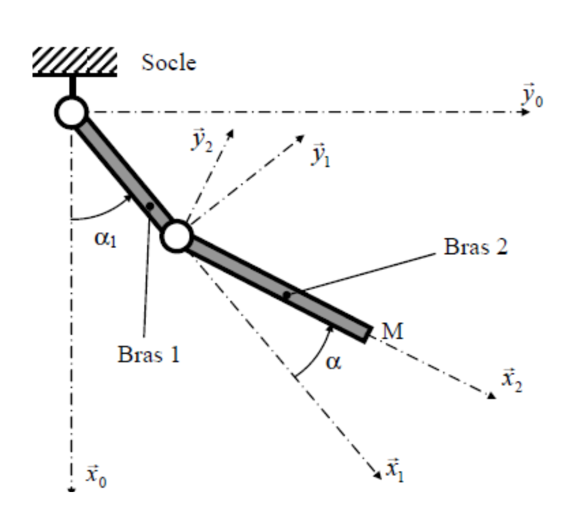
corrigé :

1- $\vec{V}(B/R_0) = \vec{V}(B/R_1) + \vec{\omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB} = \dot{\rho}\vec{v} - \rho\dot{\theta}\vec{u}$

2- $\vec{\gamma}(B/R_0) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{v} - (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}$

Exercice 2

Considérons un robot constitué d'un socle **0** et de deux bras 1 et 2. (Voir figure)



Soit les repères :

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère fixe lié au socle **0**.

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ repère lié au bras 1.

$R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ repère lié au bras 2.

On donne : $\overrightarrow{OO_1} = l_1\vec{x}_1$, $\overrightarrow{O_1M} = l_2\vec{x}_2$

1- Calculer $\vec{\omega}(R_1/R_0)$ et $\vec{\omega}(R_2/R_0)$.

2- Calculer $\vec{V}(M/R_0)$ par composition des vitesses.

3- Calculer $\vec{\gamma}(M/R_0)$.

corrigé :

1- $\vec{\omega}(R_1/R_0) = \dot{\alpha}_1\vec{z}_0$ et $\vec{\omega}(R_2/R_0) = \vec{\omega}(R_2/R_1) + \vec{\omega}(R_1/R_0) = (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2)\vec{z}_0$

2- $\vec{V}(M/R_0) = l_2(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2)\vec{y}_2 + l_1\dot{\alpha}_1\vec{y}_1$

3- $\vec{\gamma}(M/R_0) = l_2[(\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2)\vec{y}_2 - (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2)^2\vec{x}_2] + l_1[\ddot{\alpha}_1\vec{y}_1 - \dot{\alpha}_1{}^2\vec{x}_1]$

Exercice 3

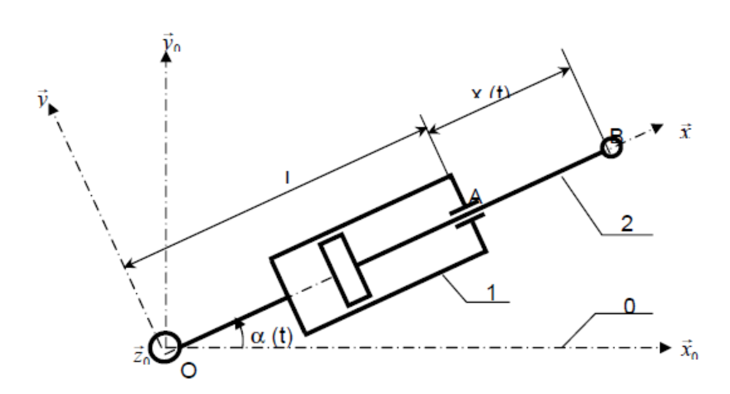
On considère le mouvement d'un vérin hydraulique composé d'un corps **1** de longueur constante L et d'une tige mobile **2**. La course de **2** par rapport à **1** est définie par $\overrightarrow{AB} = x(t)\vec{x}$.

La rotation du vérin est définie par l'angle $\alpha(t)$ porté par $\vec{z}_0$.

On appelle : $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère fixe lié au bâti **0**.

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ le repère mobile lié au vérin.

$\overrightarrow{OB} = \big(L + x(t)\big)\vec{x}$ avec L : Constante



1- Quelles sont les composantes dans R du vecteur rotation $\vec{\omega}(R/R_0)$?

2- Exprimez dans R les composantes des vitesses $\vec{V}(B/R_1)$ et $\vec{V}(B/R_0)$

3- Exprimez dans R les composantes des accélérations $\vec{\gamma}(B/R_1)$ et $\vec{\gamma}(B/R_0)$

corrigé :

1- $\vec{\omega}(R/R_0) = \dot{\alpha}\vec{z}_0$

2- $\vec{V}(B/R_1) = \dot{x}\vec{x}$ et $\vec{V}(B/R_0) = \dot{\alpha}(L+x)\vec{y} + \dot{x}\vec{x}$

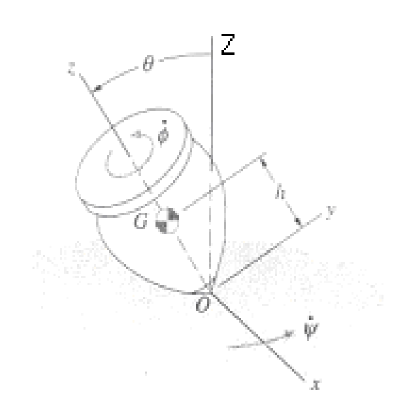
3- $\vec{\gamma}(B/R_1) = \ddot{x}\vec{x}$ et $\vec{\gamma}(B/R_0) = [\ddot{\alpha}(L+x) + 2\dot{\alpha}\dot{x}]\vec{y} + [\ddot{x} - \dot{\alpha}^2(L+x)]\vec{x}$

Exercice 4

Le point O de la toupie est considéré fixe. L'axe x reste parallèle au sol et tourne autour de Z avec une vitesse angulaire constante . La toupie tourne autour de l'axe z avec une vitesse angulaire constante . Voir figure 1.

1- Calculer les vecteurs vitesse et accélération angulaires de la toupie.

2- Calculer la vitesse du centre de masse G de la toupie.



corrigé :

Soit le repère absolu $R_0(O,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ et soit le repère lié à la toupie (T) $R_1(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

1- Le vecteur vitesse angulaire de la toupie est donné par

$\vec{\Omega}((\mathrm{T})/R_0) = \dot{\phi}\,\vec{z} + \dot{\psi}\,\vec{Z}$

Le vecteur accélération angulaire de la toupie est donné par

$$\vec{\alpha}((\mathrm{T})/R_0) = \frac{d\vec{\Omega}((\mathrm{T})/R_0)}{dt} = \dot{\phi}\left.\frac{d\vec{z}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{\phi}\left(\left.\frac{d\vec{z}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{z}\right)$$

$$= \dot{\phi}\dot{\psi}\,\vec{Z}\wedge\vec{z}$$

Or on a

$\vec{Z} = \cos(\theta)\,\vec{z} + \sin(\theta)\,\vec{y}$

Ainsi le vecteur accélération angulaire est donné par

$\vec{\alpha}((\mathrm{T})/R_0) = \dot{\phi}\dot{\psi}\sin(\theta)\,\vec{x}$

2- Le vecteur vitesse du centre de masse G s'écrit :

$\vec{V}(G/R_0) = \vec{V}(O/R_0) + \vec{\Omega}((\mathrm{T})/R_0)\wedge\overrightarrow{OG}$

Le point O est fixe : $\vec{V}(O/R_0)=\vec{0}$. Le vecteur position de G est donné par $\overrightarrow{OG}=h\,\vec{z}$. Ainsi le vecteur vitesse de G est :

$$\vec{V}(G/R_0)=(\dot{\phi}\,\vec{z}+\dot{\psi}\,\vec{Z})\wedge h\,\vec{z}=h\dot{\psi}\sin(\theta)\,\vec{x}$$

Le vecteur accélération du point G est donné par

$$\vec{\Gamma}(G/R_0)=\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}=h\dot{\psi}\left(\dot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{x}+\sin(\theta)\left.\frac{d\vec{x}}{dt}\right|_{R_0}\right)$$

Où

$$\left.\frac{d\vec{x}}{dt}\right|_{R_0}=\left.\frac{d\vec{x}}{dt}\right|_{R_1}+\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{x}=(\dot{\phi}\,\vec{z}+\dot{\psi}\,\vec{Z})\wedge\vec{x}$$

$$=(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos(\theta))\,\vec{y}-\dot{\psi}\sin(\theta)\,\vec{z}$$

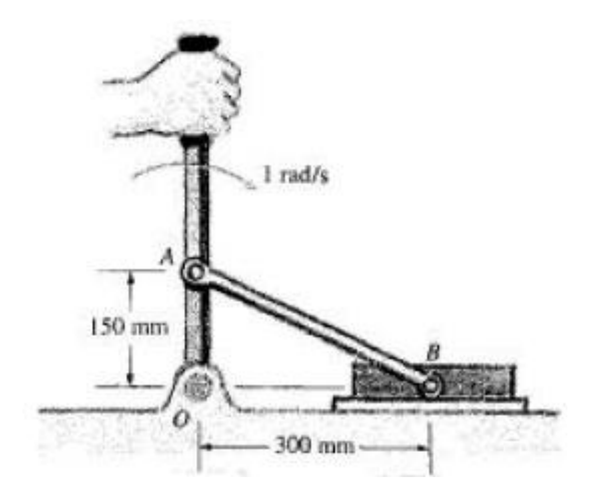
Ainsi le vecteur accélération de G s'écrit

$$\vec{\Gamma}(G/R_0)==h\dot{\psi}\left(\dot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{x}+\sin(\theta)(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos(\theta))\,\vec{y}-\dot{\psi}\sin^2(\theta)\,\vec{z}\right)$$

Exercice 5

Soit le mécanisme de la figure .

Calculer la vitesse angulaire de la barre AB. Calculer la vitesse du bloc B.



corrigé :

La vitesse angulaire de la barre (OA) $\vec{\Omega}((OA)/R_0)=-1\vec{k}$ (rad/s).

Le point A appartient aux deux barres (OA) et (AB). Ainsi, on peut calculer le vecteur vitesse du point A comme suit :

- Pour la barre (OA) : $\vec{v}_A = -\vec{k} \wedge 0.15\,\vec{j} = 0.15\vec{i}$ (m/s).
- Pour la barre (AB) : $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\Omega}((AB)/R_0) \wedge (-0.3\vec{i} + 0.15\,\vec{j})$

On écrit $\vec{\Omega}((AB)/R_9) = \Omega_{AB}\,\vec{k}$.

Contrainte : $\vec{v}_B = v_B\,\vec{i}$.

Suivant $\vec{i}$: $0.15 = v_B - 0.15\,\Omega_{AB}$

Suivant $\vec{j}$: $\Omega_{AB} = 0$ rad/s.

Par conséquent, $\vec{v}_B = 0.15\vec{i}$ (m/s).

Exercice 6

Un athlète fait des exercices à sa main en soulevant une masse m . Le point A de l'épaule est stationnaire. La distance AB est 30cm, et la distance BC est 40cm. A l'instant illustré sur la figure, $\omega_{AB} = 1\,rad/s$ et $\omega_{BC} = 2\,rad/s$.

Quelle est la vitesse de la masse m?

corrigé :

La vitesse de B est donnée par : $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega_{AB}\vec{k} \wedge AB\,\vec{i} = 0.3\vec{j}\,(m/s)$

La vitesse de C est donnée par :

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \omega_{BC}\vec{k} \wedge \overrightarrow{BC} = 0.3\vec{j} + 2\vec{k} \wedge (0.4\cos(60°)\vec{i} + 0.4\sin(60°)\,\vec{j})$$

$\Rightarrow \quad \vec{v}_C = -0.69\vec{i} + 0.7\vec{j} \quad (m/s)$

Le module de la vitesse de la masse est donnée par : $v = 0.98\,m/s$.

Exercice 7

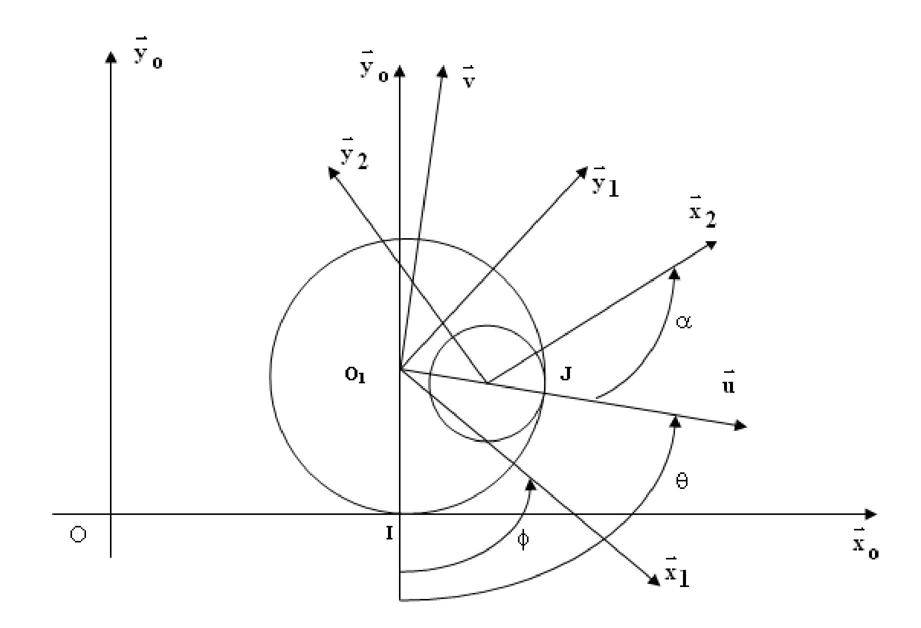
On considère un repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ avec $\vec{y}_0$ un axe vertical ascendant. Un cerceau (C) de centre O_1 de rayon R et un disque (D) de centre O_2 et de rayon r < R, sont en mouvement

dans le plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$. Le cerceau et le disque sont restreints aux liaisons suivantes : (C) roule sur l'axe $(O,\vec{x}_0)$ et (D) roule à l'intérieur de (C). Soient I le point de contact de (C) avec $(O,\vec{x}_0)$ et J le point de contact de (D) avec (C). Les repères $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1)$ et $R_2(O,\vec{x}_2,\vec{y}_2)$ sont liés au cerceau et au disque respectivement. La position du système étudié est repéré dans R_o par l'abscisse de O_1 qu'on note par x, et par les angles $\dot{\phi}$, θ et α mesurées autour de $\vec{z}_0$.

1- Calculer, pour les points géométriques I et J , $\vec{V}(I/R_0)$, $\vec{V}(J/R_0)$.

2- Calculer la vitesse de glissement de (D) sur (C) en J.

3- En déduire pour les points géométriques I et J : $\vec{V}(I/C)$, $\vec{V}(J/C)$ et $\vec{V}(J/D)$.



corrigé :

Les repères $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1)$ et $R_2(O,\vec{x}_2,\vec{y}_2)$ sont liés au cerceau et au disque respectivement.

La vitesse angulaire du cerceau (C) par rapport à $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ est $\vec{\Omega}(C/R_0)=\vec{\Omega}(R_1/R_0)=\dot{\phi}\,\vec{z}_0$.

La vitesse angulaire du disque (D) par rapport au cerceau (C) est $\vec{\Omega}(D/C)=\vec{\Omega}(D/R_1)=(\dot{\alpha}+\dot{\theta}-\dot{\phi})\,\vec{z}_0$.

La vitesse angulaire du disque par rapport à R_0 est $\vec{\Omega}(D/R_0)=\vec{\Omega}(D/C)+\vec{\Omega}(C/R_0)$ $=(\dot{\alpha}+\dot{\theta})\,\vec{z}_0$.

1- La position du point géométrique I est : $\overrightarrow{OI} = x\,\vec{x}_0$. La vitesse absolue du point I est donnée par $\vec{V}(I/R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OI}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{x}\,\vec{x}_0$.

La position du point géométrique J est : $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1J} = x\,\vec{x}_0 + R\,\vec{y}_0 + R\,\vec{u}$. La vitesse absolue du point J est donnée par :

$\vec{V}(J/R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OJ}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{x}\,\vec{x}_0 + R\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0}$; or $\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{\theta}\,\vec{v}$. Ainsi la vitesse absolue de J est

$$\vec{V}(J/R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OJ}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{x}\,\vec{x}_0 + R\dot{\theta}\,\vec{v}.$$

2- La vitesse (d'entraînement) :

$$\vec{V}(I \in C/R_0) = \vec{V}(O_1 \in C/R_0) + \vec{\Omega}(C/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1I}$$

$$\Leftrightarrow \ \vec{V}(I \in (C)/R_0) = \dot{x}\,\vec{x}_0 + \dot{\phi}\,\vec{z}_0 \wedge (-R\,\vec{y}_0) = (\dot{x} + R\dot{\phi})\,\vec{x}_0.$$

La vitesse (d'entraînement) de $\vec{V}(J \in (C)/R_0) = \vec{V}(O_1 \in (C)/R_0) + \vec{\Omega}(C/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1J}$

$$\Leftrightarrow \ \vec{V}(J \in (C)/R_0) = \dot{x}\,\vec{x}_0 + \dot{\phi}\,\vec{z}_0 \wedge R\,\vec{u} \ \Leftrightarrow \ \vec{V}(J \in (C)/R_0) = \dot{x}\,\vec{x}_0 + R\dot{\phi}\,\vec{v}.$$

La vitesse (d'entraînement) de $\vec{V}(J \in (D)/R_0) = \vec{V}(O_2 \in (D)/R_0) + \vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \overrightarrow{O_2J}$

$$\Leftrightarrow \ \vec{V}(O_2 \in (D)/R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OO_2}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{x}\,\vec{x}_0 + (R-r)\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{x}\,\vec{x}_0 + (R-r)\dot{\theta}\,\vec{v}.$$

Ainsi $\vec{V}(J \in (D)/R_0) = \dot{x}\,\vec{x}_0 + (R-r)\dot{\theta}\,\vec{v} + (\dot{\alpha} + \dot{\theta})\,\vec{z}_0 \wedge r\,\vec{u} = \dot{x}\,\vec{x}_0 + (R\dot{\theta} + r\,\dot{\alpha})\,\vec{v}$.

La vitesse de glissement de (D) sur (C) en J :

$$\vec{V}(J \in (D)/(C)) = \vec{V}(J \in (D)/R_0) - \vec{V}(J \in (C)/R_0) = \dot{x}\,\vec{x}_0 + (R\dot{\theta} + r\dot{\alpha})\,\vec{v} - (\dot{x}\,\vec{x}_0 + R\dot{\phi}\,\vec{v})$$
$$\vec{V}(J \in (D)/(C)) = (R\dot{\theta} + r\,\dot{\alpha} - R\dot{\phi})\,\vec{v}$$

Autrement la vitesse de glissement peut être calculée comme suit :

$$\vec{V}(J \in (D)/(C)) = \vec{V}(O_2 \in (D)/(C)) + \vec{\Omega}((D)/(C)) \wedge \overrightarrow{O_2J}$$

3- La vitesse $\vec{V}(I/C) = \vec{V}(I/R_0) - \vec{V}(I \in C/R_0) = -R\dot{\phi}\,\vec{x}_0$.

La vitesse $\vec{V}(J/C) = \vec{V}(J/R_0) - \vec{V}(J \in C/R_0) = R(\dot{\theta} - \dot{\phi})\,\vec{v}$.

La vitesse $\vec{V}(J/D) = \vec{V}(J/R_0) - \vec{V}(J \in D/R_0) = \dot{x}\,\vec{x}_0 + R\dot{\theta}\,\vec{v} - (\dot{x}\,\vec{x}_0 + (R\dot{\theta} + r\,\dot{\alpha})\,\vec{v}) = -r\,\dot{\alpha}\,\vec{v}$.

Exercice 8

On considère un cerceau (C) de centre C et de rayon a qui peut rouler sans glisser sur l'axe $(H,\vec{x}_0)=\Delta$. Le mouvement est plan et le repère de référence est $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Le repère $R_1(H,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est en translation par rapport à R_0 où H est définit par $\overrightarrow{OH}=y(t)\vec{y}_0$. Le cerceau (C) reste en contact avec Δ au point I. On considère un point M lié à (C) et l'on pose $\theta(t)$. Le repère $R(C,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est un repère lié au cerceau avec. La rotation du cerceau est notée par$\vec{\Omega}=\dot{\theta}\vec{z}_0$.

1°) Calculer $\vec{V}(I\in C/R_1)$, que représente cette vitesse. Calculer $\vec{V}(I/R)$, $\vec{V}(I/R_1)$. Comparer les résultats.

2°) Calculer $\vec{V}(I\in R_1/R_0)$ et $\vec{V}(I\in C/R_0)$,. Retrouver la vitesse de glissement.

3°) Calculer $\vec{\Gamma}(I\in C/R_0)$, $\vec{\Gamma}(J\in C/R_0)$. Le point J est diamétralement opposé au point I.

4°) On suppose qu'à l'instant t = 0, le cerceau (C) se trouve dans la position définie par x = -a, y = 0. Si le point M de (C) se trouvant à t = 0 en $\theta=0$ est fixe, trouver la trajectoire de I dans R_o.

corrigé :

1- $\vec{V}(I\in(C)/R_1)=\vec{V}(C\in(C)/R_1)+\vec{\Omega}((C)/R_1)\wedge\overrightarrow{CI}=\dot{x}\,\vec{x}_0+\dot{\theta}\,\vec{z}_0\wedge -a\,\vec{y}_0=(\dot{x}+a\,\dot{\theta})\,\vec{x}_0$.

$$\vec{V}(I/R)=\left.\frac{d\overrightarrow{CI}}{dt}\right|_R=-a\left.\frac{d\vec{y}_0}{dt}\right|_R=-a\left(\left.\frac{d\vec{y}_0}{dt}\right|_{R_0}+\vec{\Omega}(R_0/R)\wedge\vec{y}_0\right)=-a\,(-\dot{\theta}\,\vec{z}_0\wedge\vec{y}_0)=-a\,\dot{\theta}\,\vec{x}_0$$

$$\vec{V}(I/R_1)=\left.\frac{d\overrightarrow{HI}}{dt}\right|_{R_1}=\dot{x}\,\vec{x}_0.$$

La comparaison des deux résultats donne la vitesse de glissement du cerceau au point I : $\vec{V}(I/R_1)-\vec{V}(I/R)=(a\,\dot{\theta}+\dot{x})\,\vec{x}_0$

2- $\vec{V}(I\in R_1/R_0)=\vec{V}(H/R_0)+\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\overrightarrow{HI}=\dot{y}(t)\,\vec{y}_0$

$$\vec{V}(I\in(C)/R_0)=\vec{V}(C\in(C)/R_0)+\vec{\Omega}((C)/R_0)\wedge\overrightarrow{CI}$$
$$=\dot{x}\,\vec{x}_0+\dot{y}\,\vec{y}_0+\dot{\theta}\,\vec{z}_0\wedge -a\,\vec{y}_0=(\dot{x}+a\,\dot{\theta})\,\vec{x}_0+\dot{y}\,\vec{y}_0$$

La vitesse de glissement du cerceau (C) au point I est :

$$\vec{V}(I\in(C)/R_1)=\vec{V}(I\in(C)/R_0)-\vec{V}(I\in R_1/R_0)=(\dot{x}+a\,\dot{\theta})\,\vec{x}_0.$$

3- $\vec{\Gamma}(I\in(C)/R_0)=\vec{\Gamma}(C\in(C)/R_0)+\left.\frac{d\vec{\Omega}((C)/R_0)}{dt}\right|_{R_0}\wedge\overrightarrow{CI}+\vec{\Omega}((C)/R_0)\wedge\left(\vec{\Omega}((C)/R_0)\wedge\overrightarrow{CI}\right)$

$$\vec{\Gamma}(C \in (C)/R_0) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OC}}{dt^2}\right|_{R_0} = \ddot{x}\,\vec{x}_0 + \ddot{y}\,\vec{y}_0$$

$$\left.\frac{d\vec{\Omega}((C)/R_0)}{dt}\right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{CI} = \ddot{\theta}\,\vec{z}_0 \wedge -a\,\vec{y}_0 = a\,\ddot{\theta}\,\vec{x}_0$$

$$\vec{\Omega}((C)/R_0) \wedge \left(\vec{\Omega}((C)/R_0) \wedge \overrightarrow{CI}\right) = \dot{\theta}\,\vec{z}_0 \wedge (\dot{\theta}\,\vec{z}_0 \wedge -a\,\vec{y}_0) = a\,\dot{\theta}^2\,\vec{y}_0 .$$

$$\vec{\Gamma}(I \in (C)/R_0) = \left(\ddot{x} + a\,\ddot{\theta}\right)\vec{x}_0 + \left(\ddot{y} + a\,\dot{\theta}^2\right)\vec{y}_0$$

Le point J est opposé à I.

$$\vec{\Gamma}(J \in (C)/R_0) = \vec{\Gamma}(C \in (C)/R_0) + \left.\frac{d\vec{\Omega}((C)/R_0)}{dt}\right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{CJ} + \vec{\Omega}((C)/R_0) \wedge \left(\vec{\Omega}((C)/R_0) \wedge \overrightarrow{CJ}\right)$$

$$\vec{\Gamma}(J \in (C)/R_0) = \left(\ddot{x} - a\,\ddot{\theta}\right)\vec{x}_0 + (\ddot{y} - a\,\dot{\theta}^2)\,\vec{y}_0 .$$

4- La position du point I est donnée par $\overrightarrow{OI} = x(t)\,\vec{x}_0 + y(t)\,\vec{y}_0$.

La position du point M est donnée par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = x(t)\,\vec{x}_0 + (y(t) + a)\,\vec{y}_0 + a\,\vec{x}$.

La vitesse absolue du point M est donnée par :

$$\vec{V}(M/R_0) = \dot{x}(t)\,\vec{x}_0 + \dot{y}(t)\,\vec{y}_0 + a\left.\frac{d\vec{x}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{x}(t)\,\vec{x}_0 + \dot{y}(t)\,\vec{y}_0 + a\,\dot{\theta}\,\vec{y}_0$$

$$\vec{V}(M/R_0) = (\dot{x}(t) - a\,\dot{\theta}\sin(\theta))\,\vec{x}_0 + (\dot{y}(t) + a\,\dot{\theta}\cos(\theta))\,\vec{y}_0$$

Et comme le point M est fixe, sa vitesse est nulle : $\vec{V}(M/R_0) = \vec{0} \;\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = a\,\dot{\theta}\sin(\theta) \\ \dot{y}(t) = -a\,\dot{\theta}\cos(\theta) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = -a\cos(\theta) + c_1 \\ y(t) = -a\sin(\theta) + c_2 \end{cases}$$

La position initiale du point I est donnée par $(x(0) = -a,\ y(0) = 0)$, ainsi les constantes c_1 et c_2 sont nulles.

La position du point I est donnée par $\begin{cases} x(t) = -a\cos(\theta) \\ y(t) = -a\sin(\theta) \end{cases}$

La trajectoire du point I est donnée par : $x^2(t) + y^2(t) = a^2$ qui est l'équation d'un cercle de centre O et de rayon a.

Exercices complémentaires

Exercice 9

On considère un disque (D_1) de masse m_1, de rayon R_1 et de centre O et un cerceau (C) de même centre O et de rayon R_2 ($R_2 = \frac{3}{2}R_1$). Entre ces deux solides, on dispose un deuxième disque (D_2) de rayon r (à exprimer en fonction de R_1) et de masse m_2. On désignera par I_1 le point de contact entre (D_1) et (D_2) et par I_2 le point de contact entre (C) et (D_2) (*figure 1*). On admet que le roulement de (D_2) sur (D_1) et (C) est sans glissement. On désigne par R_0(O, $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$) un repère fixe dont $\vec{k}_0$ est perpendiculaire au plan vertical $(\vec{i}_0, \vec{j}_0)$ contenant les disques et le cerceau, et par R (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_0$) un repère en rotation autour de Oz_0 et dont l'axe Ox passe constamment par le centre de masse G du disque (D_2). L'angle θ caractérise la rotation du repère R par rapport à R_0. On donne $\vec{\Omega}(D_1/R_0) = \omega\vec{k}_0$ et $\vec{\Omega}(C/R_0) = 2\omega\vec{k}_0$ (ω est une constante positive).

1- Calculer $\vec{v}(I_1 \in D_1/R_0)$. En déduire $\vec{v}(I_1 \in D_2/R_0)$.

2- Calculer $\vec{v}(I_2 \in C/R_0)$. En déduire $\vec{v}(I_2 \in D_2/R_0)$.

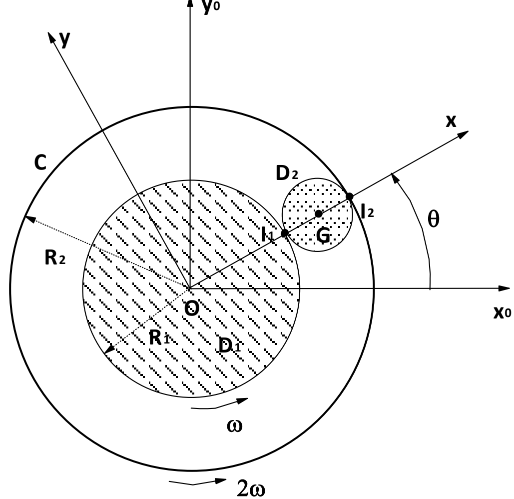
3- En utilisant la relation de transfert du torseur cinématique pour (D_2), déterminer $\vec{\Omega}(D_2/R_0)$ (on posera $\vec{\Omega}(D_2/R_0) = \alpha\vec{k}_0$ et on déterminera α en fonction de ω).

4- Calculer l'invariant scalaire I du torseur cinématique pour (D_2). En déduire la nature de ce torseur.

5- Déterminer, géométriquement et par calcul, la position du centre instantané de rotation I pour le disque (D_2).

6- Déterminer, sans calcul, la base et la roulante pour (D_2).

7- Déterminer la vitesse $\vec{v}(G/R_0)$. En déduire $\vec{\Omega}(R/R_0)$ (on remarquera que les points O et G sont fixes dans R).



8- Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}(O, D_1 / R_0)$.

9- Calculer $\vec{\sigma}(G, D_2 / R_0)$ et $\vec{\sigma}(O, D_2 / R_0)$.

10- Calculer les énergies cinétiques $E_C(D_1 / R_0)$ et $E_C(D_2 / R_0)$.

Exercice 10

On considère un système (S) formé de 4 barres homogènes OAB (A milieu de OB), OA'B' (A' milieu de OB'), A'C et AC disposées comme indiqué sur la figure 2. Les points O, A, A' et C sont des articulations pour le système. Le point O est fixe sur l'axe (Δ) alors que le point C glisse (vers le bas) sur cet axe. On donne OB = OB' = 2AC = 2A'C = 2ℓ. Les masses $m_{OB} = m_{OB'} = 2m_{AC} = 2m_{A'C} = 2m$. L'angle $\alpha = \alpha_0 - \omega t$ (α_0 et ω sont des constantes) repère les positions des barres par rapport à l'axe (Δ). On désignera par $R(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère fixe avec $\vec{j}$ représentant le vecteur directeur de (Δ). Les quatre barres sont contenues dans le plan $(\vec{i}, \vec{j})$. Tous les résultats doivent être exprimés dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1- Trouver les vitesses angulaires $\vec{\Omega}(OB/R)$ et $\vec{\Omega}(AC/R)$.

2- Calculer les vitesses $\vec{v}(A/R)$, $\vec{v}(C/R)$ et $\vec{v}(G/R)$ où G est le centre de gravité de la barre AC.

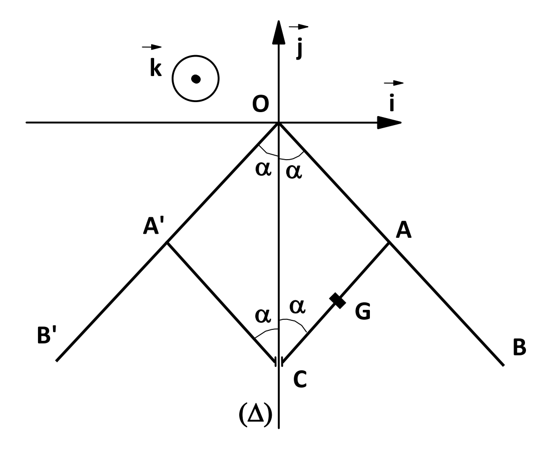
3- Déterminer géométriquement les positions des centres instantanés de rotation I et I' des barres AC et A'C, respectivement.

4- Calculer le moment cinétique $\vec{\sigma}(O, OB/R)$. En déduire le moment dynamique $\vec{\delta}(O, OB/R)$.

5- Calculer les moments cinétique $\vec{\sigma}(A, AC/R)$ et dynamique $\vec{\delta}(A, AC/R)$ de la barre AC.

6- Calculer les énergies cinétiques $E_c(OB/R)$ et $E_c(AC/R)$ des barres OB et AC.

NB : On utilisera les moments d'inertie des barres sans démonstration.



Exercice 11

On reprendra l'exercice N° 2 du chapitre II (exercice des deux barres en mouvement dans un plan vertical).

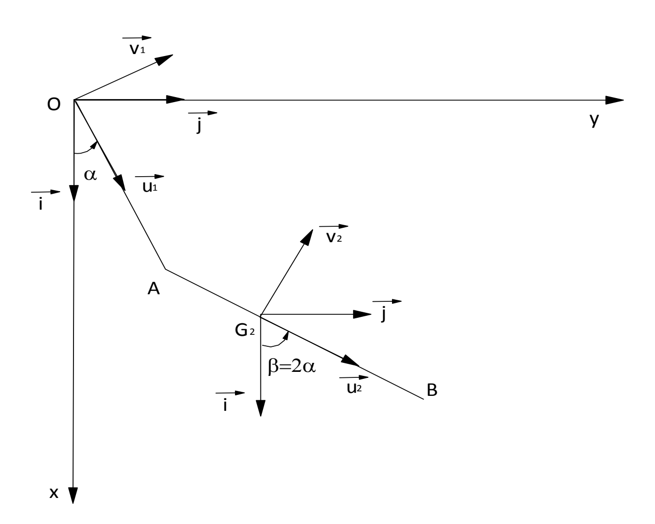
1- Calculer le moment cinétique $\vec{\sigma}(G_2, AB/R_G)$. En déduire $\vec{\sigma}(O, AB/R)$.

2- Donner le moment cinétique $\vec{\sigma}(O, OA/R)$. En déduire $\vec{\sigma}(O, S/R)$.

3- Calculer le moment dynamique $\vec{\delta}(G_2, AB/R)$. En déduire $\vec{\delta}(O, AB/R)$.

4- Calculer $\vec{\delta}(O, OA/R)$. En déduire $\vec{\delta}(O, S/R)$.

5- Déterminer les énergies cinétiques $E_C(AB/R_G)$ et $E_C(OA/R)$. En déduire $E_C(S/R)$.



Exercice 12

On considère un solide (S) homogène, composé d'une tige (T) de longueur $L = 2a$ et d'un disque (D) de rayon $R = a$. La tige a une masse $m_1 = 3m$ et le disque a une masse $m_2 = 4m$. Le disque est soudé en son centre au milieu de la tige (son plan est normal à la tige). Le mouvement du solide (S) dans le repère Ro $(O, \vec{i}_o, \vec{j}_o, \vec{k}_o)$ est tel que l'extrémité A de la tige glisse sur l'axe Oz_o et l'extrémité B est astreinte à se mouvoir dans le plan horizontal x_oOy_o. Le solide peut aussi tourner autour de son axe (AB). On suppose qu'au cours du mouvement, le disque n'est pas en contact avec le plan horizontal. Soient $R(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère lié à (S), $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_o)$ et $R_2(G, -\vec{v}, \vec{w}, \vec{k})$ deux repères intermédiaires.

1- Calculer le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S/R_o)$

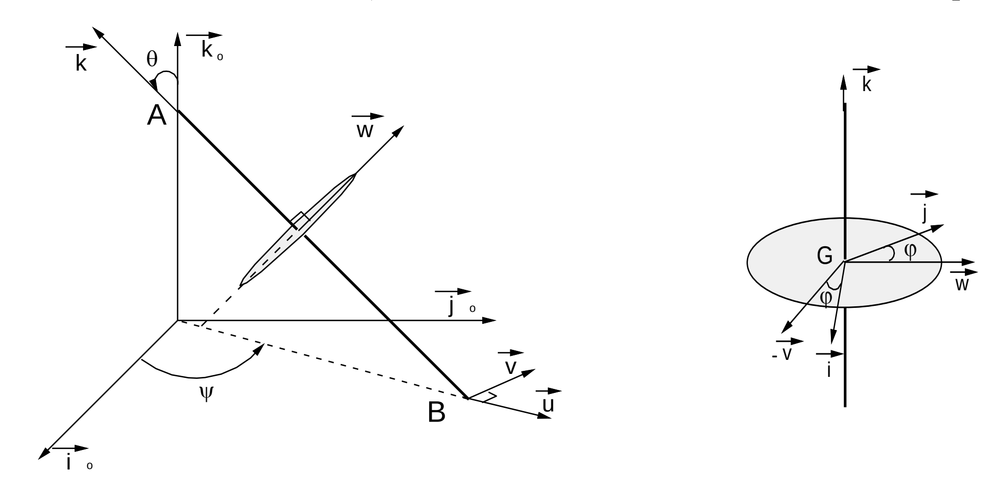
2- Calculer les éléments de réduction du torseur cinétique en O de (S) par rapport à R_o.

3- Calculer les éléments de réduction du torseur dynamique en O de (S) par rapport à R_o.

4- Calculer l'énergie cinétique de (S) dans R_o.

5- Que devient l'énergie cinétique de (S) si le point A est fixe sur l'axe Oz_o ?

6- Retrouver le résultat de **5)** en utilisant la matrice d'inertie du solide au point A.



Exercice 13

On considère un système (S) formé de 4 barres homogènes OAB (A milieu de OB), OA'B' (A' milieu de OB'), A'C et AC disposées comme indiqué sur la figure 2. Les points O, A, A' et C sont des articulations pour le système. Le point O est fixe sur l'axe (Δ) alors que le point C glisse (vers le bas) sur cet axe. On donne OB = OB' = 2AC = 2A'C = 2ℓ. Les masses m_{OB} = $m_{OB'}$ = $2m_{AC}$ = $2m_{A'C}$ = 2m. L'angle $\alpha = \alpha_0 - \omega t$ (α_0 et ω sont des constantes) repère les positions des barres par rapport à l'axe (Δ). On désignera par $R(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère fixe avec $\vec{j}$ représentant le vecteur directeur de (Δ). Les quatre barres sont contenues dans le plan $(\vec{i}, \vec{j})$. Tous les résultats doivent être exprimés dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1- Trouver les vitesses angulaires $\vec{\Omega}(OB/R)$ et $\vec{\Omega}(AC/R)$.

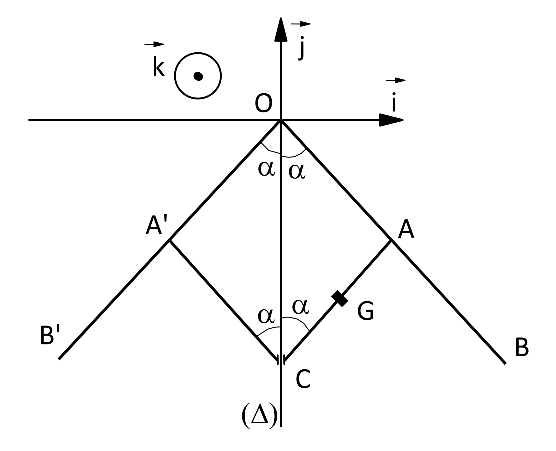
2- Calculer les vitesses $\vec{v}(A/R)$, $\vec{v}(C/R)$ et $\vec{v}(G/R)$ où G est le centre de gravité de la barre AC.

3- Déterminer géométriquement les positions des centres instantanés de rotation I et I' des barres AC et A'C, respectivement.

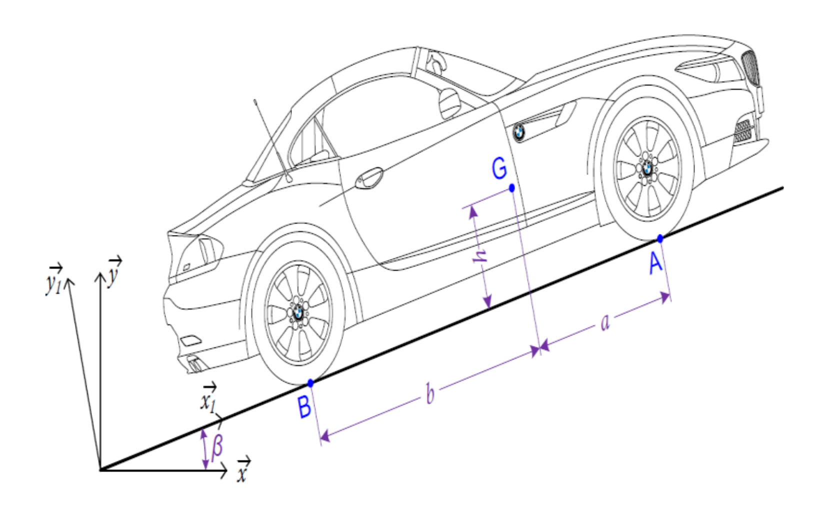
4- Calculer le moment cinétique $\vec{\sigma}(O, OB/R)$. En déduire le moment dynamique $\vec{\delta}(O, OB/R)$.

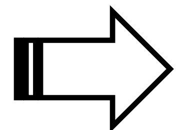
5- Calculer les moments cinétique $\vec{\sigma}(A, AC/R)$ et dynamique $\vec{\delta}(A, AC/R)$ de la barre AC.

6- Calculer les énergies cinétiques $E_c(OB/R)$ et $E_c(AC/R)$ des barres OB et AC.









Dynamique du Solide



Isaac Newton : (1642-1727)

Newton formule l'hypothèse audacieuse selon laquelle la Lune « tombe » sur la Terre de la même manière qu'un objet une pomme par exemple… tombe sur le sol. Mais en raison de sa vitesse initiale, la Lune décrit une trajectoire curviligne. Chute verticale et mouvement orbital sont donc des mouvements de même nature. Puis Newton étend cette hypothèse à tout corps céleste en orbite et aboutit à la loi suivante : « Deux corps quelconques s'attirent selon une force proportionnelle au produit de leur masse et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare ».

Objectifs :

- Introduire la notion de référentiel galiléen ;
- Appliquer le principe fondamental de la dynamique ;
- Appliquer les théorèmes généraux;
- Assimiler les notion de fonction de forces ,de potentiel et de la puissance;
- S'entrainer à la résolution des équations différentielles du mouvement ;

Exercice 1 : Mouvement d'un disque sur un tapis roulant incliné

Un disque homogène, de masse m, de rayon r, de centre G, est posé sans vitesse initiale sur un tapis roulant. Ce tapis, incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, se déplace à la vitesse constante $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}_0$ $(v_0 > 0)$ suivant l'axe Ox_0 d'un référentiel terrestre $R_O(O, x_0 y_0 z_0)$, orthonormé et direct. On suppose que les forces de contact en I admettent pour résultante $\vec{R} = \vec{T} + N\vec{j}_0$ $(N > 0)$ où $|T| = f\,N$; avec f désignant le coefficient de frottement. On pose $\overrightarrow{OG} = x_c \vec{i}_0 + r\vec{j}_0$.

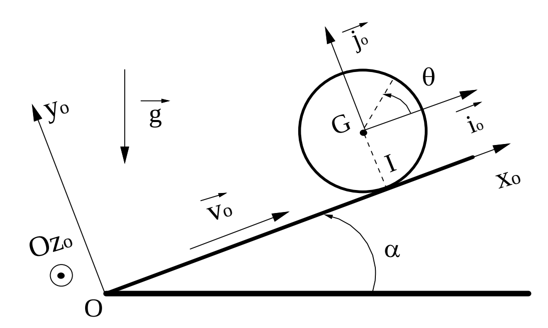
1- Calculer la vitesse de glissement $\vec{v}_g(S_1/S_2)$ du disque (S_1) sur le tapis (S_2). En déduire la vitesse de glissement initiale $\vec{v}_{g0}(S_1/S_2)$ du disque sur le tapis.

2- Appliquer le principe fondamental de la dynamique au disque en mouvement dans R_O et trouver trois équations algébriques en projetant les deux équations vectorielles résultant du P.F.D. dans la base $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$. On prendra les éléments de réduction des deux torseurs en question au point G.

3- Retrouver, en utilisant le théorème de l'énergie cinétique, deux équations algébriques de la question 2).

4- Trouver, en fonction de g, f, et α, la dérivée par rapport au temps de la vitesse de glissement.

5- Utiliser les résultats de la question 4) pour décrire l'évolution de la vitesse de glissement du disque sur le tapis roulant.



Corrigé :

1- $\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{v}(I \in S_1/R_0) - \vec{v}(I \in S_2/R_0) = (\dot{x}_C + r\dot{\theta} - v_0)\,\vec{i}_0$

$\vec{v}_{g0}(S_1/S_2) = -v_0 \vec{i}_0$ car le disque est posé sans vitesse initiale $\Rightarrow$ $\dot{x}_C = \dot{\theta} = 0$

2- P.F.D. $\Rightarrow [\mathcal{D}(S_1/R_0)] = [\mathcal{F}_{ext} \rightarrow S_1/R_0]$

(torseur dynamique = torseur des forces extérieures agissant sur le solide).

Egalité des torseurs $\Rightarrow$ égalité des résultantes (théorème du centre de masse) et égalité des moments (théorème du moment cinétique) ; i.e. :

$m\vec{\gamma}(G/R_0) = T\vec{i}_0 + N\vec{j}_0 - mg\cos\alpha\vec{j}_0 - mg\sin\alpha\vec{i}_0$ (théorème du centre de masse)

$$\vec{\delta}(G,S_1/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S_1/R_0)}{dt}\right|_{R_0} = \vec{\mathcal{M}}(G,\mathcal{F}_{ext} \to S_1/R_0)$$

$$\vec{\delta}(G,S_1/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S_1/R_0)}{dt}\right|_{R_0} = m\frac{r^2}{2}\ddot{\theta}\vec{k}_0$$

$$\vec{\mathcal{M}}(G,\mathcal{F}_{ext} \to S_1/R_0) = \overrightarrow{GI} \wedge T\vec{i}_0 = rT\vec{k}_0$$

La projection des équations vectorielles conduit à :

$$\begin{cases} \ddot{x}_C = \frac{T}{m} - g\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

$$\left\{\ddot{\theta} = \frac{2T}{mr}\right.$$

3- $E_C(S_1/R_0) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(G/R_0) + \frac{1}{2}I_{\Delta G}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_C^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}^2$

$$\left.\frac{dE_C(S_1/R_0)}{dt}\right|_{R_0} = m\dot{x}_C\ddot{x}_C + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}_{ext} \to S_1/R_0) = \vec{R}\cdot\vec{v}(G/R_0) + \vec{\mathcal{M}}(G,\mathcal{F}_{ext} \to S_1/R_0)\cdot\vec{\Omega}(S_1/R_0)$$

$$= (T\vec{i}_0 + N\vec{j}_0 - mg\cos\alpha\vec{j}_0 - mg\sin\alpha\vec{i}_0)\cdot\dot{x}_C\vec{i}_0 - Tr\vec{k}_0\cdot\dot{\theta}\vec{k}_0$$

$$= (T - mg\sin\alpha)\dot{x}_C + Tr\dot{\theta}$$

D'où : $m\dot{x}_C\ddot{x}_C + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = (T - mg\sin\alpha)\dot{x}_C - Tr\dot{\theta}$

Remarque : L'équation de l'énergie permet en général d'aboutir à une seule équation algébrique. Cependant, dans le présent cas l'identification (valable pour des conditions spécifiques) peut être utilisée ici pour conduire à:

$$\begin{cases} \ddot{x}_C = \frac{T}{m} - g\sin\alpha \\ \ddot{\theta} = \frac{2T}{mr} \end{cases}$$

4- $\left.\frac{d\vec{v}_g(S_1/S_2)}{dt}\right|_{R_0} = (\ddot{x}_C + r\ddot{\theta})\vec{i}_0$

Puisque $\vec{v}_{g0}(S_1/S_2) = -v_0\vec{i}_0 \Rightarrow T\vec{i}_0 = +f\,N\vec{i}_0 = fmg\cos\alpha\,\vec{i}_0$

En remplaçant T par $fmg\cos\alpha$ dans les expressions de $\ddot{x}_C$ et $\ddot{\theta}$, on obtient :

$$\left.\frac{d\vec{v}_g}{dt}\right|_{R_0} = 3g\cos\alpha(f - \frac{tg\alpha}{3})\vec{i}_0 = \frac{dv_g}{dt}\vec{i}_0$$

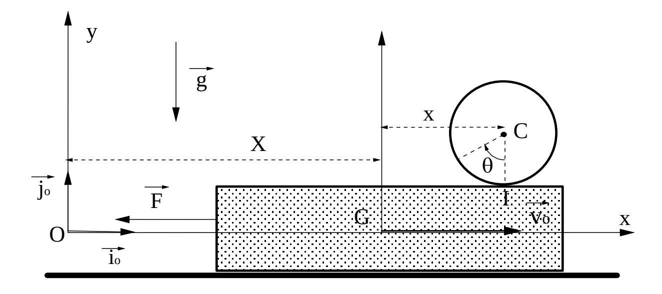
5- En utilisant 4) on peut déduire ce qui suit:

- Si $f > \frac{tg\alpha}{3}$ $\Rightarrow$ v_g croit à partir de $-v_0$ jusqu'à zéro $\Rightarrow$ d'abord il y a glissement puis absence de glissement à partir du moment où v_g va s'annuler.
- Si $f < \frac{tg\alpha}{3}$ $\Rightarrow$ v_g décroit à partir de $-v_0 \Rightarrow$ il y aura toujours glissement.

Exercice 2 : Mouvement d'un cylindre sur un plateau

On considère le système matériel composé d'un plateau (P) et d'un cylindre (C). Le plateau, de masse m est animé d'un mouvement rectiligne horizontal et uniforme de vitesse $\vec{v}_0$. Le cylindre (C), placé sur le plateau (P), est homogène, de masse m_1, de rayon *a* et son axe est perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}_0$. Le cylindre est initialement immobile par rapport au plateau.

A l'instant $t = 0$, on applique au plateau une force $\vec{F}$ de freinage constante. La résultante des forces de réaction du plateau sur le cylindre est $\vec{R} = \vec{T} + N\vec{j}_0$ (N > 0). Le coefficient de frottement de glissement du plateau sur le cylindre est f. On désigne par $R_O(O,\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$ le repère fixe et par $R_G(G,\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$ un repère lié au plateau. Le centre C du cylindre est repéré, par rapport à R_G, par $x = \overline{KI}$ avec $I \equiv K$ en x = 0 à l'instant initial $(t = 0)$. La rotation du cylindre est repérée par l'angle θ tel que $\theta = 0$ à $t = 0$. Le mouvement de (P) par rapport au repère R_O est repéré par $X = \overline{OG}$ avec X = 0 pour t = 0 et $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}_0$.



A- Cas du roulement sans glissement du cylindre sur le plateau

1- a) Faites un schéma montrant les différentes forces agissant sur le système.

b) Préciser la condition de roulement sans glissement du cylindre sur le plateau.

2- En appliquant le P.F.D. dans le repère R_O au cylindre seul, puis au plateau seul, donner les équations différentielles qui régissent le mouvement du système.

3- Trouver la relation liant $\ddot{x}$ et $\ddot{X}$. En déduire que $x(t) = \dfrac{Ft^2}{3m + m_1}$.

4- Exprimer $X(t)$ en fonction de F, v_0, m, m_1 et t. Trouver l'instant t_a correspondant à l'arrêt du plateau.

5- Sachant que le plateau restera immobile pour $t \geq t_a$, donner les valeurs de la force de frottement T et de $\vec{v}(C/R_O)$.

6- Quelle est la nature du mouvement du cylindre pour $t \geq t_a$.

B- Cas du roulement avec glissement du cylindre sur le plateau

1- Donner l'expression de la force de frottement T.

2- Exprimer la vitesse de glissement, $\vec{v}_g(C/P)$, du cylindre (C) par rapport au plan (P) en fonction de m, m_1, F, f, g et t (g est l'accélération de la gravité).

3- Trouver, en fonction de m, m_1, F, f et g, l'instant t_1 correspondant à l'arrêt du plateau.

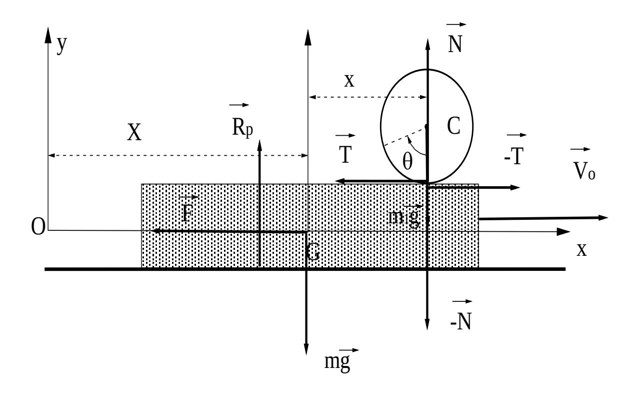
4- Pour $t \geq t_1$ le plateau restera immobile.

a) Déterminer $\vec{v}(C/R_O)$ en fonction m, m_1, F, f, g, v_0 et t.
b) Trouver, en fonction de f, g et v_0, l'instant t_2 où la vitesse de glissement s'annule.

5- Pour t > t_2, déterminer $\vec{v}(C/R_O)$ et préciser la nature du mouvement du cylindre.

Corrigé :

1-a) Voir schéma



b) $\vec{v}_g(C/P) = \vec{v}(I \in C/R_G) = \vec{v}(C/R_G) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CI} = (\dot{x} - a\dot{\theta})\vec{i}_0 = \vec{0}$

avec $\vec{\Omega}=\vec{\Omega}(C/R_G)=-\dot{\theta}\vec{k}_0$

2) P.F.D. pour le cylindre :

$$\begin{cases} m_1\vec{\gamma}(C/R_0)=m_1\vec{g}+\vec{N}+\vec{T} \\ \vec{\delta}(C,C/R_0)=(-a\,\vec{j}_0)\wedge\vec{T}\Rightarrow\dfrac{d\vec{\sigma}(C,C/R0)}{dt}=-aT\,\vec{k}_0 \end{cases}$$

Par projection sur les axes :

$$\begin{cases} m_1(\ddot{x}+\ddot{X})=-T & (2) \\ 0=N-m_1g & (3) \\ -I\ddot{\theta}=-\dfrac{m_1a^2}{2}\ddot{\theta}=-aT \quad \text{ou} \quad I\ddot{\theta}=\dfrac{m_1a^2}{2}\ddot{\theta}=aT & (4) \end{cases}$$

Théorème du centre de masse pour le plateau :

$$m\vec{\gamma}(G/R_0)=m\vec{g}+\vec{R}_P+\vec{F}-\vec{N}-\vec{T}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{X}=T-F & (5) \\ 0=R_P-N-mg & (6) \end{cases}$$

3) En utilisant les équations (1) (après dérivation) et (4) $\Rightarrow \dfrac{m_1\ddot{x}}{2}=T$ (7)

L'équation (7) dans l'équation (2) $\Rightarrow m_1\ddot{X}+m_1\ddot{x}=-\dfrac{m_1\ddot{x}}{2} \Rightarrow \ddot{X}+\dfrac{3}{2}\ddot{x}=0$ (8)

Les équations (7) et (8) dans l'équation (5) $\Rightarrow \dfrac{3}{2}m\ddot{x}=-\dfrac{m_1}{2}\ddot{x}+F$

$$\Rightarrow \ddot{x}=\frac{2F}{3m+m_1} \qquad (9)$$

Donc $x(t)=\dfrac{Ft^2}{3m+m_1}$

4) L'équation (9) dans l'équation (8) $\Rightarrow \ddot{X}=-\dfrac{3F}{3m+m_1} \Rightarrow \dot{X}=-\dfrac{3Ft}{3m+m_1}+v_0$ (10)

Donc $X(t)=-\dfrac{3Ft^2}{2(3m+m_1)}+v_0t$

L'instant t_a correspondant à l'arrêt du plateau correspond à $\dot{X}(t_a)=0$

$$\Rightarrow t_a=\frac{v_0(3m+m_1)}{3F} \qquad (11)$$

5) Pour t $\geq t_a$, le plateau s'immobilise $\Rightarrow \dot{X}(t) = \ddot{X}(t) = 0$

L'équation (2) devient $m_1\ddot{x} = -T$ et, d'après (7), $m_1\ddot{x} = 2T \Rightarrow T = 0$.

Ainsi $m_1\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = Cte = \dot{x}(t_a)$

Pour $t \leq t_a$ et, en utilisant (8), on aura $\dot{X} + \frac{3}{2}\dot{x} = v_0$ pour $t = t_a$, $\dot{X} = 0$ et $\dot{x} = \frac{2}{3}v_0$

Or $\vec{v}(C/R_0) = \vec{v}(C/R_G) + \vec{v}_e = \vec{v}(C/R_G) = \dot{x}(t)\,\vec{i}_0 = \frac{2}{3}v_0\vec{i}_0$

Le mouvement du cylindre est uniforme.

B- Cas du roulement avec glissement

1) Le P.F.D. appliqué au cylindre seul :

$$\begin{cases} m_1(\ddot{x} + \ddot{X}) = -T & (1) \\ N = m_1 g & (2) \\ -I\ddot{\theta} = -\frac{m_1 a^2}{2}\ddot{\theta} = -aT \quad \text{ou} \quad I\ddot{\theta} = \frac{m_1 a^2}{2}\ddot{\theta} = aT & (3) \\ |T| = f\,N & (4) \end{cases}$$

Le P.F.D. appliqué au plateau seul :

$m\ddot{X} = T - F$ (5)

$T = f\,m_1 g$ (6)

2) $\vec{v}_g(C/P) = \vec{v}(I \in C/R_G) - \vec{v}(I \in P/R_G) = \vec{v}(I \in C/R_G) = (\dot{x} - a\dot{\theta})\,\vec{i}_0$ (7)

L'équation (5) $\Rightarrow \ddot{X} = \frac{T - F}{m}$ et, d'après (1), $\ddot{X} + \ddot{x} = -f\,g$

Donc $\ddot{x} = -f\,g + \frac{F - T}{m} = \frac{F - fg(m + m_1)}{m}$ et $\dot{x} = \frac{F - fg(m + m_1)}{m}t$ (8)

L'équation (3) $\Rightarrow$ $a\dot{\theta} = 2fgt$ (9)

Les équations (8) et (9) dans (7) $\Rightarrow v_g(C/P) = \frac{F - fg\,t(3m + m_1)}{m}$

3) L'équation (5) $\Rightarrow \ddot{X} = \frac{t\,(fm_1 g - F)}{m} + v_0$

$\dot{X}(t_1) = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{mv_0}{F - fm_1 g}$ (10)

4) Pour $t \geq t_1$, le plateau est immobile $\Rightarrow$ $\ddot{X}(t) = \dot{X}(t) = 0 \Rightarrow \vec{v}(C/R_0) = \vec{v}(C/R_G) = \dot{x}(t)\vec{i}_0$

En utilisant (1), on obtient $\dot{x}(t) = -fgt + Cte$ (11)

Pour $0 \leq t \leq t_1$, $\dot{x}(t)$ est donné par (8), donc $\dot{x}(t_1) = \dfrac{F - fg(m+m_1)t_1}{m} = \dfrac{F - fg(m+m_1)}{F - fm_1 g} v_0$

$$v_g(C/P) = \dot{x} - a\dot{\theta} = fg(t_1 - t) + \frac{F - fg(m+m_1)}{F - fm_1 g} v_0 - 2fgt = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{v_0}{3fg}$$

5) Pour $t \geq t_2$, $v_g = 0 \Rightarrow \dot{x} = a\dot{\theta}$

$$\left.\begin{array}{l} m_1(\ddot{X} + \ddot{x}) = m_1\ddot{x} = -T \\ \dfrac{m_1 a}{2}\ddot{\theta} = \dfrac{m_1\ddot{x}}{2} = T \end{array}\right\} \Rightarrow T = 0 \Rightarrow m_1\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = Cte = \dot{x}(t_2)$$

$$\dot{x}(t_2) = fg(t_1 - t_2) + \dot{x}(t_1) = \frac{2}{3}v_0$$

$T = 0 \Rightarrow$ Le mouvement est uniforme.

Exercice 3

On considère un système matériel (Σ) constitué de deux solides (S_1) et (S_2). Le solide (S_1) est une barre AB de longueur 2ℓ, de milieu G et de masse m_1 et le solide (S_2) est un disque homogène de centre C, de rayon r et de masse m_2. Le système (Σ) est en mouvement dans un repère galiléen $R_O(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ de sorte que l'extrémité A de (S_1) glisse sans frottement l'axe Ox_0. Le solide (S_1) est en contacte ponctuel avec (S_2) en J et le coefficient de frottement f entre (S_1) et (S_2) est tel que (S_1) glisse sur (S_2). Le solide (S_1) est repéré dans R_O par l'abscisse x_A de A et par l'angle φ, quant au solide (S_2), il est repéré dans R_O par l'abscisse x_c de C et par l'angle θ. On applique sur (S_2) un couple $\vec{\Gamma} = -\Gamma\vec{k}_0$ $(\Gamma > 0)$.

On définit $R_1(A, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_0)$ et $R_2(C, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_0)$ comme étant deux repères liés à (S_1) et (S_2), respectivement. On désignera par $\vec{R}_A$ la réaction de l'axe Ox_0 sur (S_1), $\vec{R}_J = T_J\vec{i}_1 + N_J\vec{j}_1$ la réaction de (S_2) sur (S_1) et $\vec{R}_I = T_I\vec{i}_1 + N_I\vec{j}_1$ la réaction de l'axe Ox_0 sur (S_2).

1-a) Exprimer, dans la base $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ les vecteurs $\vec{\Omega}(S_1/R_O)$, $\vec{\Omega}(S_2/R_O)$, $\vec{v}(C/R_O)$, $\vec{v}(G/R_O)$, $\vec{\gamma}(C/R_O)$ et $\vec{\gamma}(G/R_O)$.

1- b) Donner la condition de roulement sans glissement de (S_2) sur l'axe (Ox_0).

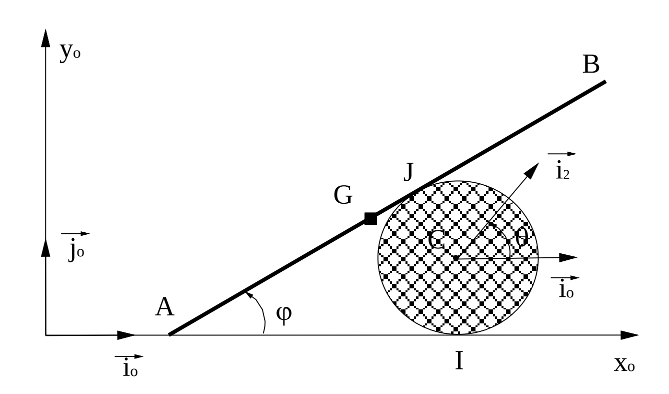
2- On admet que le contact en J entre (S_1) et (S_2) est tel que le triangle (AIJ) est isocèle et que $tg\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{x_C - x_A}$. Montrer que la vitesse de glissement de (S_1) sur (S_2) est $\vec{v}_g(S_1/S_2) = [(x_A - x_C)\cos\varphi - r\theta]\vec{i}_1$.

3- Calculer les moments cinétiques et dynamiques suivants : $\vec{\sigma}(A, S_1/R_0)$, $\vec{\sigma}(I, S_2/R_0)$, $\vec{\delta}(A, S_1/R_0)$ et $\vec{\delta}(I, S_2/R_0)$

4- Calculer les énergies cinétiques $E_C(S_1/R_0)$ et $E_C(S_2/R_0)$

5- Equations de mouvement du système (Σ) pour déterminer les inconnus x_A, x_C, φ, θ, R_A, T_J, T_I, N_I (question à rajouter)

6- Appliquer le P.F.D. à (S_1) seul puis à (S_2) seul et déduire le nombre d'équations algébriques obtenues.



Corrigé :

1-a) $\vec{\Omega}(S_1/R_0) = \dot{\varphi}\vec{k}_0$, $\vec{\Omega}(S_2/R_0) = \dot{\theta}\vec{k}_0$, $\vec{v}(C/R_0) = \dot{x}_C\,\vec{i}_0$,

$\vec{v}(G/R_0) = \vec{v}(A/R_0) + \vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AG} = (\dot{x}_A - \ell\dot{\varphi}\sin\varphi)\,\vec{i}_0 + \ell\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{j}_0$

$\vec{\gamma}(C/R_0) = \ddot{x}_C\,\vec{i}_0$, $\vec{\gamma}(G/R_0) = (\ddot{x}_A - \ell\ddot{\varphi}\sin\varphi - \ell\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\,\vec{i}_0 + (\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - \ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi)\,\vec{j}_0$

b) $\vec{v}(I \in S_2/R_0) = \vec{v}(C/R_0) + \vec{\Omega}(S_2/R_0) \wedge \overrightarrow{CI} = (\dot{x}_C + r\dot{\theta})\vec{i}_0$

$$\vec{v}(I \in (Ox_0)/R_0) = \vec{0}$$

$$\vec{v}_g(S_2/Ox_0) \Rightarrow \vec{v}(I \in S_2/R_0) = \vec{v}(I \in (Ox_0)/R_0)$$

Roulement sans glissement $\Rightarrow$ $\vec{v}_g(S_2/Ox_0) = \vec{0}$ $\Rightarrow$ La condition de RSG : $(\dot{x}_C + r\dot{\theta}) = 0$

2- $\vec{v}(J \in S_1/R_0) = \vec{v}(A/R_0) + \vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AJ} = \dot{x}_A\vec{i}_0 + (x_C - x_A)\dot{\varphi}\vec{j}_1$

$$\vec{v}(J \in S_2 / R_0) = \vec{v}(C/R_0) + \vec{\Omega}(S_2/R_0) \wedge \overrightarrow{CJ} = \dot{x}_C \vec{i}_0 - r\dot{\theta}\,\vec{i}_1$$

$$\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{v}(J \in S_1/R_0) - \vec{v}(J \in S_2/R_0) = \left[(\dot{x}_A - \dot{x}_C)\cos\varphi - r\dot{\theta}\right]\vec{i}_1 + \left[(\dot{x}_C - \dot{x}_A)\dot{\varphi} - (\dot{x}_A - \dot{x}_C)\sin\varphi\right]\vec{j}_1$$

Or $\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = \dfrac{r}{x_C - x_A}$ $\Rightarrow$ (par dérivation) $(\dot{x}_C - \dot{x}_A)\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} + (x_C - x_A)\frac{\dot{\varphi}}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 0$

$$2(\dot{x}_C - \dot{x}_A)\cos\tfrac{\varphi}{2}\sin\tfrac{\varphi}{2} + (x_C - x_A)\dot{\varphi} = 0$$

$$(\dot{x}_C - \dot{x}_A)\sin\varphi + (x_C - x_A)\dot{\varphi} = 0$$

Ainsi : $\vec{v}_g(S_1/S_2) = \left[(\dot{x}_A - \dot{x}_C)\cos\varphi - r\,\dot{\theta}\right]\vec{i}_1$

3- $\vec{\sigma}(A, S_1/R_0) = \vec{\sigma}(G, S_1/R_0) + m_1\vec{v}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{GA}$

$$= \tfrac{1}{3}m_1\ell^2\dot{\varphi}\vec{k}_0 + \ell\vec{i}_1 \wedge m_1\vec{v}(G/R_0)$$

$$= \left(\tfrac{4}{3}m_1\ell^2\dot{\varphi} - m_1\ell\dot{x}_A\sin\varphi\right)\vec{k}_0$$

$$\vec{\sigma}(I, S_2/R_0) = \vec{\sigma}(C, S_2/R_0) + m_2\vec{v}(C/R_0) \wedge \overrightarrow{CI}$$

$$= \tfrac{1}{2}m_2 r^2\dot{\theta}\vec{k}_0 + r\vec{j}_0 \wedge m_2\dot{x}_C\vec{i}_0$$

$$= (\tfrac{1}{2}m_2 r^2\dot{\theta} - m_2 r\dot{x}_C)\vec{k}_0 = \tfrac{3}{2}m_2 r^2\dot{\theta}\vec{k}_0$$

$$\vec{\delta}(A, S_1/R_0) = \frac{d\vec{\sigma}(A, S_1/R_0)}{dt} + \vec{v}(A/R_0) \wedge m_1\vec{v}(G/R_0)$$

$$= (\tfrac{4}{3}m_1\ell^2\ddot{\varphi} - m_1\ell\ddot{x}_A\sin\varphi)\vec{k}_0$$

$$\vec{\delta}(I, S_2/R_0) = \frac{d\vec{\sigma}(I, S_2/R_0)}{dt} = (\tfrac{1}{2}m_2 r^2\ddot{\theta} - m_2 r\ddot{x}_C)\vec{k}_0 = \tfrac{3}{2}m_2 r^2\ddot{\theta}\vec{k}_0$$

4- Calculer les énergies cinétiques $E_C(S_1/R_0)$ **et** $E_C(S_2/R_0)$

$$E_C(S_1/R_0) = \tfrac{1}{2}m_1\vec{v}^2(G/R_0) + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}m_1\ell^2\dot{\varphi}^2 = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_A^2 + \tfrac{2}{3}m_1\ell^2\dot{\varphi}^2 - m_1\ell\dot{x}_A\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$E_C(S_2/R_0) = \tfrac{1}{2}m_1\vec{v}^2(C/R_0) + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}m_2 r^2\dot{\theta}^2 = \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_C^2 + \tfrac{1}{4}m_2 r^2\dot{\theta}^2 = \tfrac{3}{4}m_2 r^2\dot{\theta}^2$$

5- Le P.F.D. appliqué à (S_1) seul :

$$m_1\vec{\gamma}(G/R_0) = \vec{R}_A + m_1\vec{g} + \vec{R}_J$$

et $$\vec{\delta}(A, S_1/R_0) = \overrightarrow{AG} \wedge m_1\vec{g} + \overrightarrow{AJ} \wedge \vec{R}_J$$

Par projection suivant les vecteurs de base $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$, on obtient :

$$m_1(\ddot{x}_A - \ell\ddot{\varphi}\sin\varphi - \ell\dot{\varphi}^2\cos\varphi) = T_J\cos\varphi - N_J\sin\varphi \qquad (1)$$

$$m_1(\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - \ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi) = R_A - m_1 g + T_J\sin\varphi + N_J\cos\varphi \qquad (2)$$

$$\tfrac{4}{3}m_1\ell^2\ddot{\varphi} - m_1\ell\ddot{x}_A\sin\varphi = -m_1 g\ell\cos\varphi + (x_C - x_A)N_J \qquad (3)$$

Le P.F.D. appliqué à (S_2) seul :

$$m_2\vec{\gamma}(C/R_0) = \vec{R}_I + m_2\vec{g} - \vec{R}_J$$

et $$\vec{\delta}(I, S_2/R_0) = \vec{IJ} \wedge (-\vec{R}_J) + \vec{\Gamma}$$

Par projection suivant les vecteurs de base $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$, on obtient :

$$m_2\ddot{x}_C = T_I - T_J\cos\varphi + N_J\sin\varphi \qquad (4)$$

$$0 = -m_2 g + N_I - T_J\sin\varphi - N_J\cos\varphi \qquad (5)$$

$$\tfrac{1}{2}m_2 r^2\ddot{\theta} - m_2 r\ddot{x}_C = -N_J r\sin\varphi + T_J r(1+\cos\varphi) - \Gamma \qquad (6)$$

L'application du P.F.D. de manière séparée pour chacun des 2 solides conduit donc à 6 équations algébriques. Il reste 3 équations supplémentaires pour avoir autant d'équations que d'inconnus.

Les 3 équations restantes peuvent être obtenues comme suit:

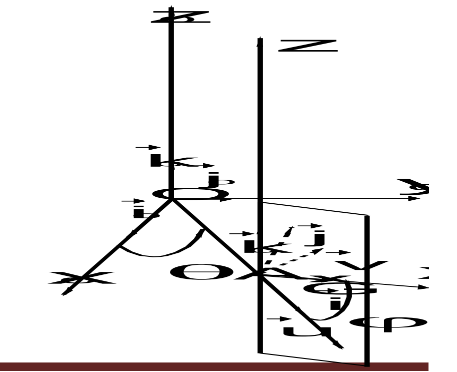
Contact en J entre (S_1) et (S_2) $\Rightarrow$ $tg\frac{\varphi}{2} = \dfrac{r}{x_C - x_A}$ (7)

RSG de (S_2) sur (Ox_0) $\Rightarrow$ $(\dot{x}_C + r\dot{\theta}) = 0$ (8)

Glissement de (S_1) sur (S_2) $\Rightarrow$ $|T| = f|N|$ (9)

Exercice 4

On considère un solide (S) caractérisant une plaque rectangulaire verticale, homogène, de masse m, de largeur 2L, de hauteur $2h$ et d'épaisseur négligeable. Le point A de la plaque (situé à mi-hauteur) glisse le long de l'axe $(O,\vec{u})$ et ce dernier est contenu dans le plan horizontal xoOyo du repère $R_o(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$. La plaque est animée d'un mouvement de rotation d'angle φ autour de l'axe vertical Az et l'axe $(O,\vec{u})$ est en rotation d'angle θ autour de l'axe vertical Oz_o du



repère R_o (Figure 6). Le repère $R(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k}_0)$ est lié à la plaque et le repère $R'(A,\vec{u},\vec{v},\vec{k}_0)$ est un repère intermédiaire. On définit les angles $(\vec{i}_0,\vec{u})=(\vec{j}_0,\vec{v})=\theta$ et $(\vec{u},\vec{i})=(\vec{v},\vec{j})=\varphi$. Noter qu'au cours du mouvement, les plans $(A,\vec{i},\vec{j})$ *et* $(A,\vec{u},\vec{v})$ restent confondus avec le plan horizontal x_oOy_o. On donne : $\overrightarrow{AG}=L\vec{i}$ *et* $\overrightarrow{OA}=r\vec{u}$.

Calculer :

1- Les vitesses $\vec{v}(A/R_0)$ *et* $\vec{v}(G/R_0)$.

2- Le vecteur $\vec{\Omega}(S/R_0)$.

3- Les moments cinétiques $\vec{\sigma}(A,S/R_0)$ et $\vec{\sigma}(O,S/R_0)$.

4- L'énergie cinétique E_c (S/R_o).

corrigé :

1- On a $\vec{\Omega}(S/R_0)=(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\vec{k}_0$ et $\vec{V}(A/R_0)=\dot{r}\vec{u}+r\dot{\theta}\vec{v}$

Et par suite : $\vec{V}(G/R_0)=\left|\begin{array}{c}\dot{r}-Lsin\varphi(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\\ r\dot{\theta}+Lcos\varphi(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\\ 0\end{array}\right.$

2- On a $\vec{\Omega}(S/R_0)=(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\vec{k}_0$

3- $\vec{\sigma}(A,S/R_0)=mL\left(r\dot{\theta}cos\varphi-\dot{r}sin\varphi+\frac{4}{3}L(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\right)\vec{k}_0$

$$\vec{\sigma}(0,S/R_0)=m\left(Lr\dot{\theta}cos\varphi-L\dot{r}sin\varphi+\frac{4}{3}L^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})+r^2\dot{\theta}+rLcos\varphi(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\right)\vec{k}_0$$

4- $E_c(S/R_0)=\frac{1}{2}m[\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\frac{4}{3}L^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2+2L(\dot{\theta}+\dot{\varphi})(r\dot{\theta}cos\varphi-\dot{r}sin\varphi)]$

Exercice 5

L'élargissement du domaine de vol des avions de combat modernes soumet les pilotes de chasse à des niveaux d'accélération de plus en plus élevés. L'accélération ressentie par le pilote est généralement exprimée en « équivalent pesanteur » noté G, avec 1 G = 9,81 m/s^2 figure 2.

Dans le cadre de l'entraînement physiologique des pilotes, l'utilisation d'une centrifugeuse humaine est un moyen avantageux de recréer au niveau du sol, l'accélération subie en opération. Les figures 1 et 3 présentent une centrifugeuse où l'on reconnaît une structure cinématique ouverte à quatre corps (support, bras, anneau et nacelle) assemblés par liaison pivot.

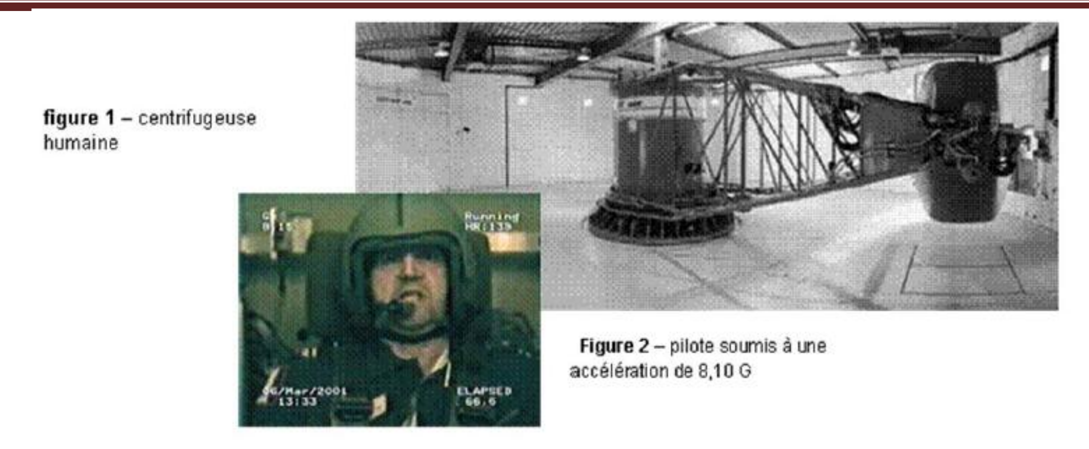
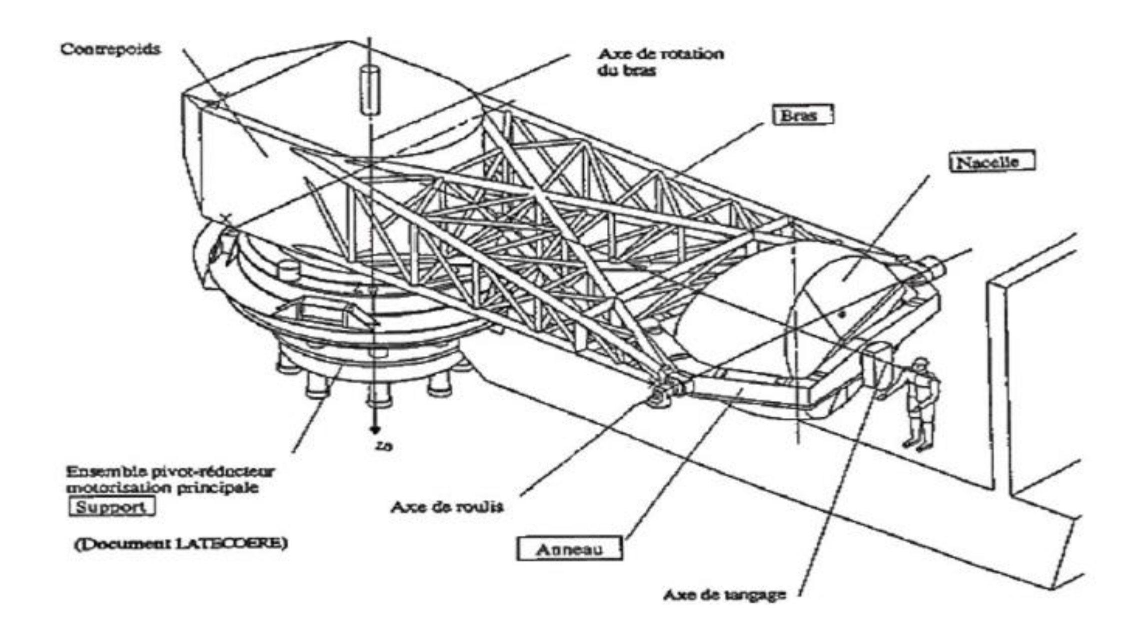

figure 1 – centrifugeuse humaine

Figure 2 – pilote soumis à une accélération de 8,10 G



La figure 4 représente le modèle de la centrifugeuse retenu pour l'étude cinématique et dynamique du système qui est constitué par :

- un bras **1** de longueur $\overrightarrow{OI} = -R\vec{y}_1$, en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ par rapport au bâti **0**. Sa position est paramétrée par l'angle ψ.
- un anneau **2** en liaison pivot d'axe $(I, \vec{x}_1)$ et de paramètre θ par rapport à l'axe $(I, \vec{y}_1)$. lié au bras **1**.
- une nacelle 3 dans laquelle prend place le pilote, en liaison pivot d'axe $(I, \vec{y}_2)$ et de paramètre φ par rapport à l'axe $(I, \vec{x}_2)$ lié à l'anneau 2.

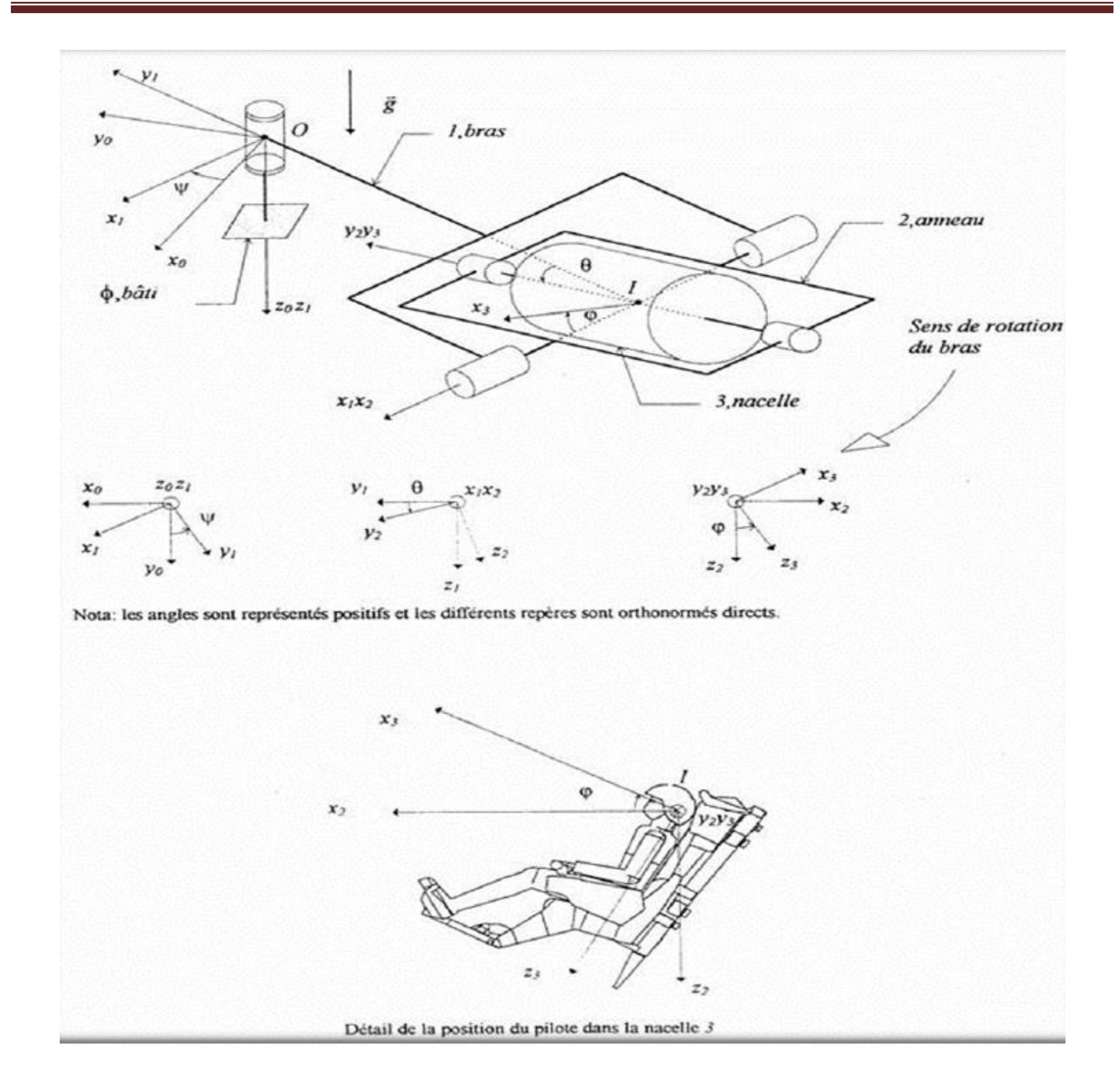
L'actionneur de tangage est essentiellement dimensionné par les couples qu'il doit fournir durant les phases d'accélération du bras. La vitesse du bras sera considérée comme variable.

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère absolu lié au bâti **0**.

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère mobile au bras **1**.

$R_2(I, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère mobile lié à l'anneau **2**.

$R_3(I, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ un repère mobile lié à la nacelle **3**.



Détail de la position du pilote dans la nacelle 3

Approche cinématique :

1. Déterminer les vecteurs instantanés de rotation des mouvements relatifs $\vec{\Omega}(R_1/R_0)$, $\vec{\Omega}(R_1/R_2)$ et $\vec{\Omega}(R_3/R_2)$. En déduire alors $\vec{\Omega}(R_3/R_0)$.
2. Calculer le vecteur $\vec{V}(I\epsilon 3/R_0)$ du point I dans le mouvement de **3** par rapport à **0**.
3. Calculer le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(I\epsilon 3/R_0)$ en projection dans la base $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$.

Approche Dynamique :

Soit $II_{(3)_I} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$: La matrice d'inertie du solide **3** en I dans R_2.

Le solide **3** de masse m a son centre d'inertie en I.

Soit $\{\tau_{2/3}\}_I = \begin{Bmatrix} X_{2/3} & L_{2/3} \\ Y_{2/3} & 0 \\ Z_{2/3} & N_{2/3} \end{Bmatrix}_{R_2}$ le torseur des efforts de liaison entre **2** et **3** en I dans la base R_2.

Soit $\{\tau_{m/3}\}_I = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{23} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_2}$ avec C_{23} le couple suivant l'axe $(I, \vec{y}_3)$ fourni à la nacelle **3** par le moteur d'asservissement monté sur l'anneau **2,** telle que $\overrightarrow{C_{23}} = C_{23}\vec{y}_3$.

4. Calculer la résultante cinétique $\vec{R}_C(3/R_0)$ de la nacelle **3** dans son mouvement par rapport au bâti.
5. Etant donné que I est le centre de gravité de la nacelle **3,** calculer son moment cinétique $\vec{\sigma}_I(3/R_0)$ dans son mouvement par rapport au bâti.Exprimer dans R_2
6. Donner alors le torseur cinétique en I de la nacelle **3** dans son mouvement par rapport au bâti. Les éléments de réduction du torseur seront exprimés dans $R_2(I, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.
7. Calculer la résultante dynamique $\vec{R}_d(3/R_0)$ de la nacelle **3** dans son mouvement par rapport au bâti. Exprimer dans R_2 cette résultante
8. Etant donné que I est le centre de gravité de la nacelle **3,** calculé son moment dynamique $\vec{\delta}_I(3/R_0)$ dans son mouvement par rapport au bâti.
9. Donner alors le torseur dynamique en I de la nacelle **3** dans son mouvement par rapport au bâti. Les éléments de réduction du torseur seront exprimés dans $R_2(I, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.
10. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au solide **3** dans son mouvement par rapport au bâti. Ecrire les équations en projection sur $R_2(I, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et déterminer l'expression du couple moteur C_{23}.

corrigé :

Approche cinématique :

1- Les vecteurs instantanés de rotation des mouvements relatifs :

$\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 = \dot{\psi}\vec{z}_1$

$\vec{\Omega}(R_1/R_2) = \dot{\theta}\vec{x}_1 = \dot{\theta}\vec{x}_2$

et $\vec{\Omega}(R_3/R_2) = \dot{\varphi}\vec{y}_2 = \dot{\varphi}\vec{y}_3$

et par suite : $\vec{\Omega}(R_3/R_0) = \vec{\Omega}(R_3/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_0) = \dot{\varphi}\vec{y}_2 + \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{x}_1$

2- $\vec{V}(I\epsilon 3/R_0) = R\dot{\psi}\vec{x}_1$

3- $\vec{\Gamma}(I\epsilon 3/R_0) = R\ddot{\psi}\vec{x}_1 + R\dot{\psi}\vec{y}_1$

Approche Dynamique :

4- $\vec{R}_C(3/R_0) = R\dot{\psi}\vec{x}_2$

5- $\vec{\sigma}_I(3/R_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}sin\theta \\ \dot{\psi}cos\theta \end{pmatrix} = A\dot{\theta}\vec{x}_2 + B(\dot{\varphi} + \dot{\psi}sin\theta)\vec{y}_2 + A\dot{\psi}cos\theta\vec{z}_2$

6- $\{C(3\ /\ R_0\}_I = \begin{Bmatrix} mR\dot{\psi} & A\dot{\theta} \\ 0 & B(\dot{\varphi} + \dot{\psi}sin\theta) \\ 0 & A\dot{\psi}cos\theta \end{Bmatrix}$

7- $\vec{R}_d(3/R_0) = mR\ddot{\psi}\vec{x}_1 + mR\dot{\psi}^2 cos\theta\vec{y}_2 - mR\dot{\psi}^2 sin\theta\vec{z}_2$

8- $\vec{\delta}_I(3/R_0) = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_I(3/R_0))_{R_0}$

10- $C_{23} = B(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}sin\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}cos\theta)$

Exercices complémentaires

Exercice 6

Deux poulies doubles (P) et (P′), mobiles sans frottement autour d'axes horizontaux Ox et O′x′, sont reliées par une courroie sans masse. Le transfert de mouvement entre les deux poulies se fait sans glissement. La poulie (P) a un moment d'inertie J, un rayon externe R et un rayon interne αR (α < 1). Elle supporte un corps (M) de masse m par un fil inextensible et sans masse. La poulie (P′), de moment J′, a un rayon externe R et un rayon interne α′R $(\alpha'<1)$ et supporte également un corps (M′) de masse m′ via un fil inextensible et sans masse. On désigne par R(O, xyz) le repère fixe.

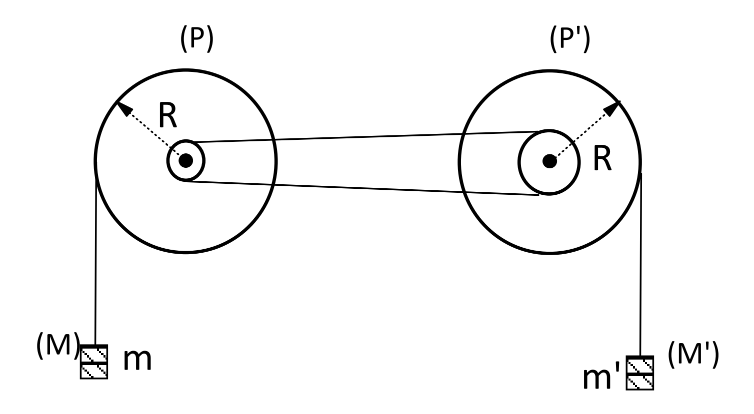
1- En utilisant la condition de roulement sans glissement de la courroie sur les deux poulies, trouver la relations liant les vitesses $\vec{v}(M/R)$ et $\vec{v}(M'/R)$.

2- Déterminer, en fonction des données, l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ du corps (M) en utilisant le théorème de l'énergie cinétique pour le système en entier (les deux poulies + les deux corps).

3- Retrouver ce résultat en utilisant le théorème du centre de masse pour les corps (M) et (M') et le théorème du moment cinétique en O pour (P) et en O' pour (P').

4- Trouver la différence de tension (T-T′) entre les deux brins de la courroie.

5- Déterminer numériquement $\vec{\gamma}(M/R)$ et T-T′. On donne $\alpha = 1/3$, $\alpha' = 1/2$, g = 9.8 N·kg^{-1}, $R = 20cm$, $J = J' = 0.02 kg.m^2$ et $m = m' = 200g$.



Exercice 7

Système sphère + cale en équilibre sur un plan incliné

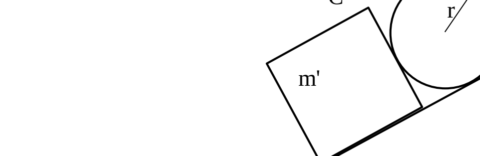
On considère un système ($\sum$) formé d'une sphère (S) s'appuyant sur une cale (C). Le système ($\sum$) = (S) + (C) est posé sur un plan incliné d'angle α (voir figure). La sphère est homogène de masse m, de rayon r et d'axe horizontal. La cale (C) a la forme d'un cube de masse m′. On désignera par $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ la réaction du plan incliné sur la sphère, par $\vec{R}' = \vec{N}' + \vec{T}'$ la réaction du plan incliné sur la cale et par $\vec{R}'' = \vec{N}'' + \vec{T}''$ la réaction de la cale sur la sphère. ***On étudiera le système en l'absence de mouvement***.

1- Faites un schéma sur lequel on reportera les différentes forces agissant sur (S) et sur (C).

2- En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la sphère, établir trois équations reliant les composantes de $\vec{R}$, $\vec{R}''$ et le poids $m\vec{g}$.

3- En déduire une relation entre T et T″ (modules de $\vec{T}$ et $\vec{T}''$).

4- En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la cale, établir trois autres équations reliant les composantes de $\vec{R}'$, $\vec{R}''$ et le poids $m'\vec{g}$.



5- En déduire une relation entre T′ et T″.

6- En appliquant le théorème de centre de masse au système ($\sum$) = (S) + (C), trouver deux autres équations entre les composantes de $\vec{R}$, $\vec{R}'$ $m\vec{g}$ et $m'\vec{g}$.

7- En déduire les relations suivantes : $T = \frac{m+m'}{2} g \sin\alpha$, $N = mg\cos\alpha - \frac{m+m'}{2} g \sin\alpha$,

$N' = m'g\cos\alpha + \frac{m+m'}{2} g\sin\alpha$ et $N'' = \frac{m-m'}{2} g \sin\alpha$.

Exercice 8

Une barre homogène de longueur 2ℓ et de masse m est maintenue en équilibre instable dans le plan vertical xOy de telle sorte que son centre de masse G soit situé sur l'axe Oy comme l'indique la figure. On laisse tomber la barre sans vitesse initiale et on suppose que son extrémité A glisse sans frottement sur le sol horizontal. Au cours de son mouvement, la barre reste dans le plan vertical xOy du repère fixe R(O, xyz) supposé galiléen.

1- Préciser la trajectoire du centre de masse G de la barre.

2- Déterminer graphiquement la position du centre instantané de rotation (C.I.R.) I de la barre et déduire une représentation graphique de $\vec{v}(B/\mathcal{R})$.

3- Calculer les vecteurs vitesse $\vec{v}(G/\mathcal{R})$ et accélération $\vec{\gamma}(G/\mathcal{R})$ du centre de masse de la barre.

4- Calculer les moments cinétiques du solide $\vec{\sigma}(G,S/\mathcal{R})$ et $\vec{\sigma}(I,S/\mathcal{R})$ respectivement aux points G et I.

5- Calculer les moments dynamiques du solide $\vec{\delta}(G,S/\mathcal{R})$ et $\vec{\delta}(I,S/\mathcal{R})$ respectivement aux points G et I.

Exercice 9: Système sphère + cale en équilibre sur un plan incliné

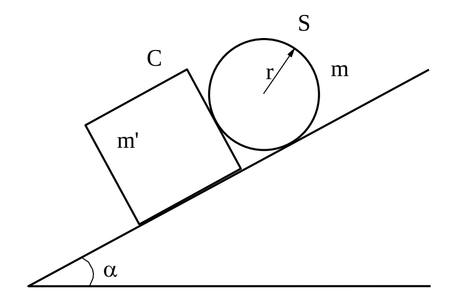
On considère un système (∑) formé d'une sphère (S) s'appuyant sur une cale (C). Le système (∑) = (S) + (C) est posé sur un plan incliné d'angle α (figure 1). La sphère est homogène de masse m, de rayon r et d'axe horizontal. La cale (C) a la forme d'un cube de masse m′. On désignera par $\vec{R}=\vec{N}+\vec{T}$ la réaction du plan incliné sur la sphère, par $\vec{R}'=\vec{N}'+\vec{T}'$ la réaction du plan incliné sur la cale et par $\vec{R}''=\vec{N}''+\vec{T}''$ la réaction de la cale sur la sphère. On étudiera le système en l'absence de mouvement.

1- Faites un schéma sur lequel on reportera les différentes forces agissant sur (S) et sur (C).

2- En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la sphère, établir trois équations reliant les composantes de $\vec{R}$, $\vec{R}''$ et le poids $m\vec{g}$.

3- En déduire une relation entre T et T″ (modules de $\vec{T}$ et $\vec{T}''$).

4- En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la cale, établir trois autres équations reliant les composantes de $\vec{R}'$, $\vec{R}''$ et le poids $m'\vec{g}$.



5- En déduire une relation entre T′ et T″.

6- En appliquant le théorème de centre de masse au système (∑) = (S) + (C), trouver deux autres équations entre les composantes de $\vec{R}$, $\vec{R}'$ $m\vec{g}$ et $m'\vec{g}$.

7- En déduire les relations suivantes : $T=\frac{m+m'}{2}g\sin\alpha$, $N=mg\cos\alpha-\frac{m+m'}{2}g\sin\alpha$, $N'=m'g\cos\alpha+\frac{m+m'}{2}g\sin\alpha$ et $N''=\frac{m-m'}{2}g\sin\alpha$.

Exercice 10

Le système matériel (S), mobile dans le plan vertical fixe (xOy) (Ox vertical descendant), comporte un cerceau (C) rigide, de centre O, de moment d'inertie I par rapport à l'axe Oz et un disque (D) de masse m, de moment d'inertie J par rapport à l'axe Az, parallèle à Oz, passant par son centre d'inertie A. Le cerceau peut tourner sans frottement en O (point de

contact) autour de l'axe Oz et le disque demeure en contact ponctuel en P à l'intérieur de (C). On admet que le frottement de contact entre (C) et (D) est suffisant pour assurer le roulement du disque sans glissement et on néglige le couple de résistance au roulement.

On pose OA = a et AP = b. Le mouvement de (S) est défini par les paramètres □, □□et □ tels que:

ψ : angle d'un rayon matériel de (C) avec Ox,

θ : angle de OP avec Ox,

φ : angle d'un rayon matériel de (D) avec Ax.

On désignera par N et T respectivement les composantes normale et tangentielle de la réaction de (C) sur (D).



1- Écrire la condition de roulement sans glissement en P.

2- Exprimer, en fonction des paramètres $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$:

a) Le moment cinétique de (D) par rapport à Az,

b) Le moment cinétique de (D) par rapport à Oz,

c) le moment cinétique de (S) par rapport à Oz.

3- En plus des forces de liaisons et des poids, le système est soumis à un couple d'axe Oz et d'intensité appliqué à (C). Donner les équations différentielles du mouvement du système (S) en appliquant :

a) Le théorème du moment cinétique à (S) en O.

b) Le théorème du moment cinétique à (D) en A.

c) Le théorème du centre de masse à (D).

4- On suppose que le couple agit de sorte que $\Psi = 0, \forall t$.

a) Donner une équation différentielle du second ordre pour $\theta(t)$.

b) Déterminer $\theta(t)$ pour les petits mouvements en θ.

Exercice 11

On considère un solide constitué d'une tige AG horizontale, de masse négligeable, solidaire d'un disque homogène de centre G, de rayon r et de masse m. La tige est confondue avec l'axe du disque et son extrémité A est fixée sur l'axe Oz_0. Le disque est vertical et reste constamment en contact avec le plan horizontal x_0Oy_0 d'un repère galiléen $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$. On désignera par $R_1(G, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_0)$ un repère intermédiaire et $R(G, \vec{u}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère lié au solide. Le mouvement du solide est étudié par rapport au repère R_0. On donne $AG = OI = \ell$ et on suppose que les actions de contact (contacts ponctuels) en A et I ont pour résultantes

$\vec{R}_A = R_1\vec{u} + R_2\vec{v} + R_3\vec{k}_0$ et $\vec{R}_I = T\vec{v} + N\vec{k}_0$, respectivement. Le vecteur accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{k}_0$. Exprimer touts les résultats dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_0)$.

1- Déterminer les éléments de réduction du torseur des actions de contact de la tige sur le disque au point G.

2- Calculer les éléments de réduction du torseur cinématique en G et en A.

3-Donner les matrices d'inertie du solide en G et en A.

4- Calculer les éléments de réduction du torseur cinétique en G et en A.

5- Calculer l'énergie cinétique du solide

6- Appliquer le P.F.D. au solide dans le repère R_0 et déduire toutes les équations algébriques régissant son mouvement.

7- Calculer la vitesse de glissement du disque sur le plan x_0Oy_0 et monter que cette vitesse finira par s'annuler.

8- Calculer la puissance des forces extérieures appliquées au solide.

9- Calculer les composantes des actions de contact sur le solide dans le cas d'un roulement sans glissement (on prendra $\dot{\psi} = \omega_1$ à t = 0).

10- Chercher une condition sur $\dot{\psi}$ et $\dot{\theta}$ pour que le disque se déplace sans toucher le plan x_0Oy_0 (la condition de roulement sans glissement n'est plus valable).

Exercice 12:

Une tige AB de longueur 2l, de masse m et de milieu O tourne autour de la verticale OZ_0 passant par O. Un disque D de rayon R, de centre G et de masse M, est assujetti à rester dans le plan vertical AOZ_0. Il roule sans glisser sur la tige AB. Le contact entre la tige et le disque a lieu au point I et $OI=ri_1$.

Le repère $R_0(O,i_0,j_0,k_0)$ est fixe.

Le repère $R_1(O,i_1,j_1,k_0)$ est lié a la tige AB, l'angle entre x_0 et x_1 est $\varphi(t)$.

Le repère $R(G,i,j_1,k)$ est lié au disque D, l'angle (z_0,z) est $\theta(t)$.

1- calculer $V(G/R_0)$,$\Omega(AB/R_0)$ et $\Omega(D/R_0)$.

2- Calculer le moment cinétique en 0 de Σ =D+AB.

3- Calculer le moment dynamique en O de Σ .

4- Calculer l'énergie cinétique de Σ .

Exercice 13:

Soit le système matériel (∑) formé de deux solides rigides et homogènes :

-Une tige (T), de masse m, de longueur L et de centre de masse T ;

-Un disque (D), de masse M, de rayon r et de centre de masse D.

Une extrémité de la tige est fixée en O à un axe horizontal (Δ) et l'ensemble [(T) + (D)] est articulé au point D. Le mouvement du système se fait dans le plan vertical (O, $\vec{i}_o, \vec{j}_o$). Le repère : $R_0(O, \vec{i}_o, \vec{j}_o \vec{k}_o)$ est supposé galiléen, le vecteur $\vec{i}$ est lié à la tige et le vecteur $\vec{i}_1$ est lié au disque.

$\left[\vec{R}_o, \vec{\Gamma}_0\right]$ désignent les éléments de réduction du torseur des actions

de contact $\{axe(\Delta) \rightarrow (T)\}$.

$\left[\vec{R}_D, \vec{\Gamma}_D\right]$ désignent les éléments de réduction du torseur des actions

de contact $\{(T) \rightarrow (D)\}$

1°) Quel est le nombre de degrés de liberté du système (∑) ?

2°) Faire le bilan des forces extérieures et le bilan des forces intérieures

qui s'appliquent à (∑).

3°) Trouver l'expression de la puissance des forces de contact qui

s'exercent sur (∑) (en O et en D) dans R_o en fonction des éléments

de réduction des torseurs des actions de contact et de $\dot{\theta}$ *et* $\dot{\varphi}$.

4°) Que devient la puissance des forces de contact calculée en 3°) lorsque

les liaisons en O et en D sont parfaites ?

Dans la suite, on suppose que les liaisons en O et D sont parfaites.

5°) Calculer les moments cinétique et dynamique de (D) en D par rapport à R_o

6°) Calculer les moments cinétique et dynamique de (∑) en O par rapport à R_o

7°) Appliquer le théorème du moment dynamique à (D) en D et trouver l'équation différentielle vérifiée par θ.

8°) Appliquer le théorème du moment dynamique à (∑) en O et trouver l'équation différentielle vérifiée par φ.

9°) Calculer l'énergie mécanique de (Σ) dans R_o. 0n prendra l'énergie potentielle nulle pour $\varphi=\pi/2$.

10°) Appliquer le théorème de l'énergie mécanique et retrouver une des équations du mouvement.

Exercice 14:

On considère un solide constitué d'une tige AG horizontale, de masse négligeable, solidaire d'un disque homogène de centre G, de rayon r et de masse m. La tige est confondue avec l'axe du disque et son extrémité A est fixée sur l'axe Oz_0. Le disque est vertical et reste en contact avec le plan horizontal x_0Oy_0 d'un repère Galiléen $R_0(O,\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$. On désignera par $R_1(G,\vec{u},\vec{v},\vec{k}_0)$ un repère intermédiaire et $R(G,\vec{u},\vec{j},\vec{k})$ un repère lié au solide. Le mouvement du solide est étudié par rapport au repère R_0. On donne $AG=OI=\ell$ et on suppose que les actions de contact en A et I ((le contact est ponctuel en ces points) ont pour résultantes, respectivement, $\vec{R}_A=R_1\vec{u}+R_2\vec{v}+R_3\vec{k}_0$ et $\vec{R}_I=T\vec{v}+N\vec{k}_0$. $\vec{g}=-g\vec{k}_0$ est l'accélération de la pesanteur. Exprimer touts les résultats dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{k}_0)$.

1) Déterminer les éléments de réduction du torseur des actions de contact de la tige sur le disque au point G.
2) Calculer les éléments de réduction du torseur cinématique en G et en A.
3) Donner les matrices d'inertie du solide en G et en A.
4) Calculer les éléments de réduction du torseur cinétique en G et en A.
5) Calculer l'énergie cinétique du solide.
6) Appliquer le P.F.D. au solide dans le repère R_0 et déduire.
   toutes les équations algébriques régissant son mouvement.

7) Calculer la vitesse de glissement du disque sur le plan x_0Oy_0 et
   monter que cette vitesse finira par s'annuler.

8) Calculer la puissance des forces extérieures appliquées au solide.
9) Calculer les composantes des actions de contact sur le solide dans
   le cas d'un roulement sans glissement (on prendra $\dot{\psi}=\omega_1$ à t=0).

10) Chercher une condition sur $\dot{\psi}$ et $\dot{\theta}$ pour que le disque se déplace
   sans toucher le plan x_0Oy_0 (la condition de roulement sans glissement n'est plus valable).

Exercice 15:

On considère un système matériel (S) constitué de deux solides homogènes de même masse m : le premier est une tige (T)=OB de longueur 2L et de centre de masse A et le second est un disque (D) de centre C et de rayon a. La tige T tourne dans le plan (x_oOy_o). Le disque (D) est assujetti à se déplacer sur la tige en restant dans le plan vertical $(O,\vec{i}_1,\vec{k}_0)$. On désigne par I_1

et I_2 les points de contact appartenant respectivement à (T) et (D) et par I le point de contact géométrique ($\vec{OI} = x\vec{i}_1$). L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{k}_o$ et la réaction de la tige sur le disque au point de contact a pour expression : $\vec{R} = R_x\vec{i}_1 + R_y\vec{j}_1 + R_z\vec{K}_O$. Le disque (D) est en plus soumis à une force $\vec{F} = F_X\vec{i}_1 + F_Y\vec{J}_1$, appliquée au point I_2 pour le maintenir en contact avec la tige. On étudiera le mouvement de (S) par rapport au repère galiléen $R_o(O, \vec{i}_o, \vec{j}_o, \vec{k}_o)$. Le repère $R_1(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_0)$ est lié à la tige et $R_2(C, \vec{i}_2, \vec{j}_1, \vec{k}_2)$ est lié au disque. Tous les résultats doivent être exprimés dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_0)$.

1°) Calculer les éléments de réduction au point C du torseur cinématique associé au mouvement du disque (D).

2°) Calculer la vitesse de glissement du disque sur la tige.

3°) Déterminer la matrice d'inertie de (T) en O et celle de (D) en C.

4°) Calculer les moments cinétiques suivants : $\sigma(C,(D)/R_o)$ et

$\sigma(I,(D)/R_o)$ et $\sigma(O,(S)/R_o)$.

5°) Calculer l'énergie cinétique du système (S).

6°) Calculer la puissance des forces extérieures appliquées au disque (D).

7°) Calculer la puissance des forces intérieures au système (S)

8°) Supposons maintenant qu'on applique sur la moitié supérieure du disque (D)

un champ de force dont le moment en O est nul et dont la résultante est

$\vec{R}_E = b\,\vec{k}_o$. Calculer la puissance produite par ce champ de force.

9°) Dans la suite, on étudiera le mouvement du disque (D) en absence du champ

de force de la question 8).

a/ En appliquant le P.F.D au disque (D) au point C et déterminer 6 équations algébriques du mouvement.

b/ Reprendre la question a/ en appliquant le P.F.D au point I

RSG de (S_2) sur (Ox_0) $\Rightarrow (\dot{x}_C + r\dot{\theta}) = 0$ (8)

Glissement de (S_1) sur (S_2) $\Rightarrow |T| = f|N|$ (9)

Exercice 16 : Mouvement d'une barre sur un cylindre

Une barre (S), homogène, mince, de longueur 2ℓ, de centre G et de masse m est posée sur un cylindre (C), de rayon R, fixe dans un repère galiléen R(O, xyz). Le contact entre la barre et le cylindre est supposé ponctuel et sans frottement. La mouvement de la barre a lieu dans le plan vertical xOz avec O se trouvant sur l'axe du cylindre et Oz est l'axe vertical ascendant. Le point I de contact est repéré à tout instant par l'angle $\theta = (Oz, OI)$. A l'instant t = 0, le centre de masse G est en H et $\theta = 0$ (voir figure a). Le mouvement de la barre à un instant t quelconque est schématisé par la figure b. On définit x par $\overrightarrow{GI} = x\vec{v}$.

Il est recommandé d'utiliser la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{j})$ comme étant une base de projection.

1- Calculer la vitesse du centre de gravité de la barre, $\vec{v}(G/R)$, en fonction de R, $\dot{\theta}$, x et $\dot{x}$.

2- Calculer la vitesse de glissement, $\vec{v}_g(S/C)$, de la barre sur le cylindre en fonction de R, $\dot{\theta}$ et $\dot{x}$.

3- En déduire la condition de roulement sans glissement et montrer qu'en absence de glissement $GI = x = R\theta$.

On admet que le roulement a lieu sans glissement pour la suite de l'exercice et $x = R\theta$.

4- Que devient l'expression de $\vec{v}(G/R)$? En déduire $\vec{\gamma}(G/R)$ en fonction de R, θ, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.

5- Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}(G, S/R)$. En déduire $\vec{\sigma}(I, S/R)$.

6- Déterminer le moment dynamique $\vec{\delta}(G, S/R)$. En déduire $\vec{\delta}(I, S/R)$.

7- Trouver l'équation du mouvement de la barre en appliquant le théorème du moment dynamique en I.

8- Calculer l'énergie cinétique $E_C(S/R)$.

9- Retrouver l'équation de mouvement de la barre en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

Rappel : Le moment d'inertie d'une barre de longueur 2ℓ par rapport à un axe perpendiculaire à la barre et passant par son centre de gravité est $I_{\Delta G} = \dfrac{m\ell^2}{3}$.

10) Calculer les moments cinétiques $\vec{\sigma}(A, S_1/R_O)$ et $\vec{\sigma}(I, S_2/R_O)$ ainsi que les moments dynamiques $\vec{\delta}(A, S_1/R_O)$ et $\vec{\delta}(I, S_2/R_O)$.

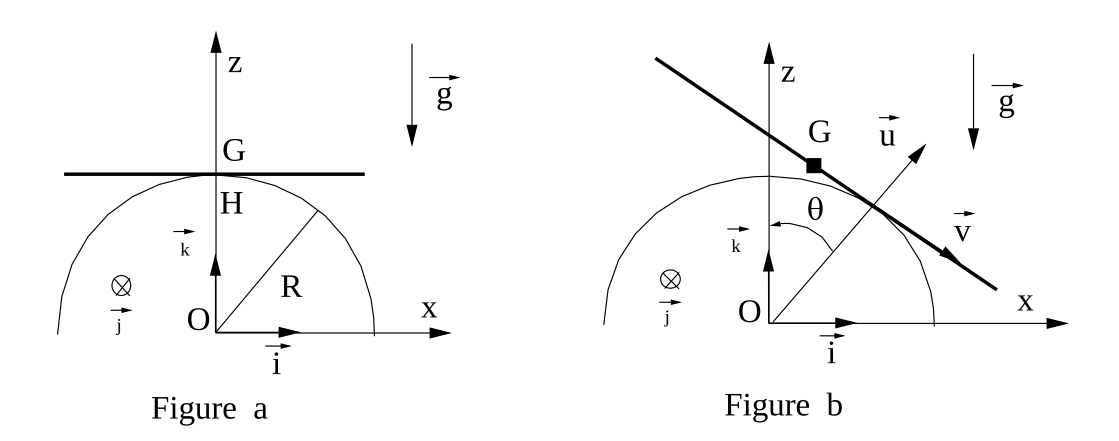
11) Calculer les énergies cinétiques $E_C(S_1/R_O)$ et $E_C(S_2/R_O)$.

12) On se propose de déterminer les équations de mouvement du système (Σ). En faisant un bilan des inconnus on en identifie 9 ce qui nécessite 9 équations pour la résolution du problème.

13) Préciser les 9 inconnus.

b) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à (S_1) seul puis à (S_2) seul. Déduire le nombre d'équations résultant de l'application de ce principe.

c) Quelles sont les 3 équations qui restent ?



Exercice 17

Au bati "0" est attaché le repère Rg ($O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g$). Le champs de pesanteur est donné par : $\vec{g} = g\vec{x}_g$ (g>0).

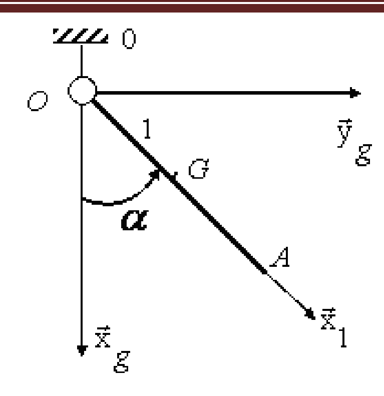
Une barre homogène rectiligne "1" de dimension latérale négligeable devant la longueur, d'extrémité O et A, de masse m et de centre d'inertie G, est liée au bati par une liaison pivot parfaite d'axe ($O, \vec{z}_g$). On lui attache le repère R_1($O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$).

On pose $\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_1$; $\alpha = (\vec{x}_g, \vec{x}_1)$

1) Déterminez le torseur cinématique $\nu(1/0)$ du mouvement de 1 par rapport à R_g.
2) Ecrivez les expressions des torseurs des actions mécaniques sur 1, action de pesanteur $\tau(p/1)$ et action du bati 0 sur 1 $\tau(0/1)$.
3) Donnez l'expression du PFD appliqué à 1 sous forme torsorielle. Préciser l'équation scalaire qui ne fait intervenir que le mouvement de 1 par rapport à R_g. (utilisez l'expression en un point qui facilitera le calcul)
4) Donnez l'expression du moment cinétique en O du mouvement de 1 par rapport à R_g(bati:0).
5) Donnez l'équation reliant les moments cinétique et dynamique entre eux et déterminez l'équation différentielle du mouvement de 1 par rapport à R_g.

Le torseur d'action d'une liaison pivot est : $\left\{\begin{array}{c} X\,\vec{x}_g + Y\,\vec{y}_g + Z\,\vec{z}_g \\ L\,\vec{x}_g + M\,\vec{y}_g \end{array}\right._O$

La matrice d'inertie en O du solide 1 exprimée dans R_1 est donnée par $I(O,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{3} \end{bmatrix}_{R_1}$



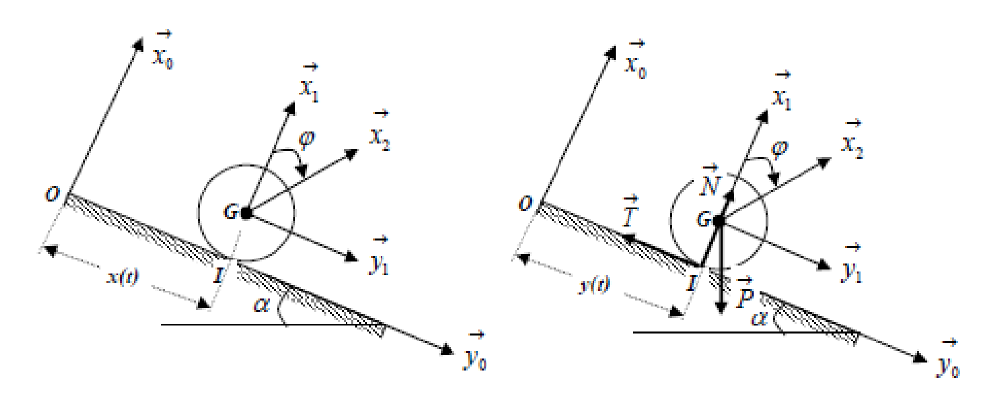
Exercice 18

Un disque plein de rayon ***a*** , de masse ***m*** roule sans glisser sous l'effet de la gravitation sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère fixe lié au plan incliné, $R_1(G,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ lié au centre d'inertie G du disque et $R_2(G,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ un repère en rotation par rapport à l'axe $\vec{z}_1=\vec{z}_2$ tel que $(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=(\vec{y}_1,\vec{y}_2)=\varphi$.

A l'instant initial, le disque est immobile. La réaction au point de contact entre le disque et le plan incliné a deux composantes, l'une $\vec{N}$ normale au plan incliné, l'autre $\vec{T}$ tangentielle à ce dernier.

Le tenseur d'inertie du disque en son centre d'inertie ***G*** dans le repère R_2 est donné par :

$$I(G,R_2)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 2A \end{bmatrix}_{R_2} \quad \text{avec } A=\frac{Ma^2}{4}, \textit{ On prendra } R_1 \textit{ comme repère de projection}$$



1) Déterminer la vitesse $\vec{V}^0(G)$ et l'accélération $\vec{\gamma}^0(G)$ du point G ;
2) Appliquer le théorème de la résultante dynamique au disque ;
3) Appliquer le théorème du moment dynamique au disque ;
4) Trouver une équation scalaire liant les paramètres cinématiques $\dot{y}, \dot{\theta}$ *et* a et qui traduisent la condition de roulement sans glissement du disque sur le plan incliné ;
5) En déduire les expressions de N, T, $\ddot{y}$ et $\ddot{\varphi}$ en fonction de m, g, α *et* a.
6) Déterminer l'énergie cinétique du disque en fonction de m, a , $\dot{y}$; *et* $\dot{\varphi}$
7) Exprimer l'énergie cinétique du disque en fonction de m et $\dot{y}$ en tenant compte de la condition de roulement sans glissement ;

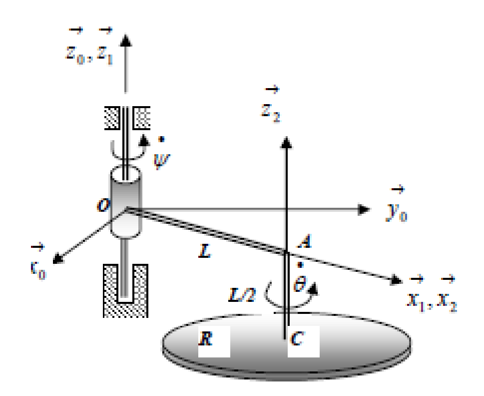
8) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au disque, retrouver l'expression de l'accélération linéaire $\ddot{y}$.

Exercice 19

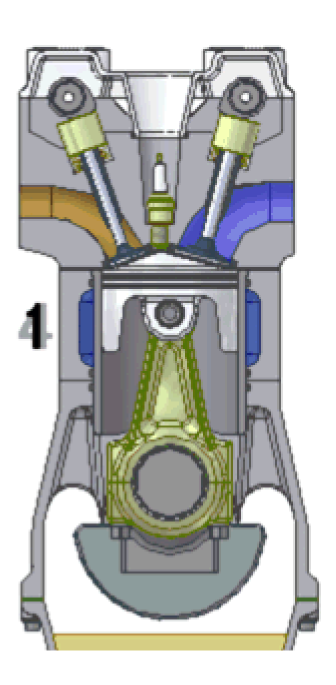
Une machine de ponçage des sols est composée d'un bras *OAC* de masse négligeable tel que *OA=L*, *AC=L/2* et d'un disque de rayon *R* et de masse *M* . Le bras est en mouvement de rotation par rapport au bâti fixe avec une vitesse de rotation . Le disque tourne autour du bras *AC* avec une vitesse de rotation On prendra comme repère de projection.

Déterminer :

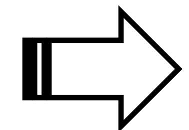
1) Vitesse de rotation instantanée du disque
2) Vitesse et accélération absolues du point *C*
3) Le torseur cinétique du disque en *O* ;
4) Le torseur dynamique du disque en *O* ;
5) L'énergie cinétique du système



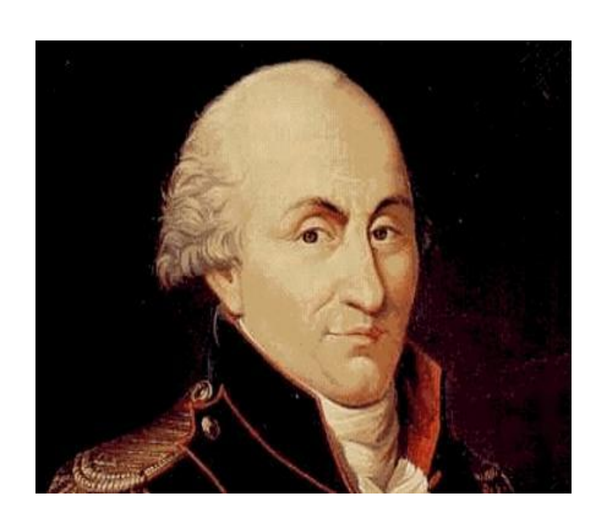




Les liaisons piston-bielle et piston-chemise
sont des pivots glissants



Liaisons-Forces de Liaison



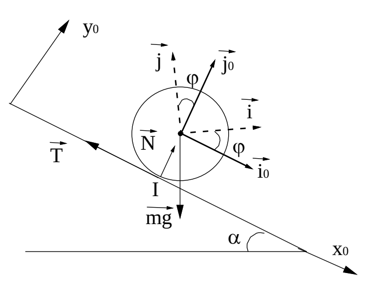
Charles Coulomb : (1736-1806)

La loi de Coulomb en mécanique, nommée en l'honneur de Charles de Coulomb, exprime sous une forme très simplifiée l'intensité des forces de frottements qui s'exercent entre deux solides. Selon que ces solides glissent ou non l'un contre l'autre, on parle de glissement (frottement dynamique) ou d'adhérence (frottement statique). Dans les deux cas, les actions réciproques qui s'exercent entre ces solides comportent : une composante normale N qui les presse l'un contre l'autre, une composante tangentielle T qui s'oppose, ou tend à s'opposer, au glissement.

Objectifs :

- Savoir déterminer la nature de liaisons ;
- Différencier entre liaisons unilatérales et liaisons bilatérales;
- Comprendre la notion de liaison holomone;
- S'entrainer à l'application des lois de Coulomb.

Exercice 1 : Mouvement d'une sphère sur un plan incline



La sphère a un rayon r et une masse m. Désignons par f le coefficient de frottement résultant du contact entre la sphère et le plan incliné. Les résistances au roulement et au pivotement sont négligées ($\lambda = \mu = 0$).

- Etude du mouvement

Le mouvement de la sphère étant plan, on aura besoin au plus de 3 paramètres primitifs pour le décrire (x_G, y_G et φ).

La liaison de contact en I impose $y_G = r$ ($\forall t$)

Le mouvement dépend donc uniquement des paramètres x_G et φ.

La force de contact $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T} = N\vec{j}_0 + T\vec{i}_0$ (T grandeur algébrique < ou > 0).

Les inconnus du problème sont x_G, φ, T et N.

Le P.F.D. appliqué au solide en mouvement est $[\mathcal{D}(S/R_0)] = [\mathcal{F}_{ext\to S}]$

• Égalité des résultantes ⇒ $m\vec{\gamma}(G/R_o) = m\vec{g} + \vec{R}$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x}_G = mg\sin\alpha + T & (1) \\ 0 = -mg\cos\alpha + N & (2) \end{cases}$$

• Égalité des moments:

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_o)}{dt}\right|_{Ro} = \vec{\mathcal{M}}(G, F_{ext\to S})$$

$\vec{\sigma}(G,S/R_o) = \vec{\sigma}(G,S/R_G) = I_{Gz}\dot{\varphi}\vec{k}_o = \frac{2}{5}mr^2\dot{\varphi}\vec{k}_o$ (solide en rotation autour d'un axe fixe /R_G)

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_o)}{dt}\right|_{Ro} = \frac{2}{5}mr^2\ddot{\varphi}\vec{k}_o$$

$$\vec{\mathcal{M}}(G, F_{ext\to S}) = \overrightarrow{GI} \wedge \vec{R} + \underbrace{\overrightarrow{GG} \wedge m\vec{g}}_{=0} = -r\vec{j}_o \wedge T\vec{i}_o = rT\vec{k}_o$$

Théorème du moment cinétique: $\frac{2}{5}mr^2\ddot{\varphi} = rT \Rightarrow T = \frac{2}{5}mr\ddot{\varphi}$ (3)

• Cas du roulement sans glissement

$$\vec{v}_g(S/\text{plan}) = \vec{0} = \vec{v}(I \in S/R_o) = \vec{v}(G/R_o) + \vec{\Omega}(S/R_o) \wedge \overrightarrow{GI}$$
$$= \dot{x}_G \vec{i}_o + \dot{\varphi}\vec{k}_o \wedge -r\vec{j}_o = (\dot{x}_G + r\dot{\varphi})\vec{i}_o$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_G + r\dot{\varphi} = 0 \quad (4)$$

Finalement on a un système de 4 équations à 4 inconnus.

L'équation (4) $\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\dfrac{\ddot{x}_G}{r}$ (5)

L'équation (3) $\Rightarrow T = \dfrac{2}{5} m r \ddot{\varphi} = -\dfrac{2}{5} m \ddot{x}_G$

L'équation (1) $\Rightarrow -\dfrac{5}{2} T = mg \sin\alpha + T \Rightarrow \dfrac{7}{2} T = -mg\sin\alpha$

$\Rightarrow T = -\dfrac{2}{7} mg\sin\alpha < 0$

L'équation (1) à nouveau $\Rightarrow m\ddot{x}_G = mg\sin\alpha + T = mg\sin\alpha - \dfrac{2}{7} mg\sin\alpha = \dfrac{5}{7} mg\sin\alpha$

$\Rightarrow \ddot{x}_G = \dfrac{5}{7} g\sin\alpha$

L'équation (5) $\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\dfrac{5}{7}\dfrac{g}{r}\sin\alpha$

L'équation (2) $\Rightarrow N = mg\cos\alpha$

Dans le cas d'un roulement sans glissement on a l'inégalité suivante:

$$\|\vec{T}\| \le f\|\vec{N}\| \Rightarrow \frac{2}{7} mg\sin\alpha \le fmg\cos\alpha \Rightarrow \boxed{f \ge \frac{2}{7} tg\alpha}$$

• Cas du roulement avec glissement

Si $f \le \dfrac{2}{7} tg\alpha$ $\Rightarrow$ il y aura glissement $\Rightarrow \|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$ (6)

Cette équation va remplacer l'équation (4).

Or $N = mg\cos\alpha$

L'équation (6) $\Rightarrow \|\vec{T}\| = fmg\cos\alpha$ (7)

$$\Rightarrow\ T = \varepsilon f m g \cos\alpha \qquad (\text{avec}\ \varepsilon = \pm 1)$$

♦ $\varepsilon = +1$: si $\vec{v}_g(S/R_o)$ est opposée à $\vec{i}_o$ (sphère tournant trop vite: c'est un cas très rare)

♦ $\varepsilon = -1$: si $\vec{v}_g(S/R_o)$ est de même sens que $\vec{i}_o$ (cas très fréquent)

L'équation (1) $\Rightarrow\ m\ddot{x}_G = mg\sin\alpha + T = mg\sin\alpha + \varepsilon f m g \cos\alpha$

$$\Rightarrow \ddot{x}_G = g\sin\alpha + \varepsilon f g \cos\alpha$$

L'équation (3) $\Rightarrow\ \ddot{\varphi} = \frac{5}{2}\frac{T}{mr} = \frac{5}{2}\frac{\varepsilon}{r} fg\cos\alpha$

Après intégration, on obtient:

$$\dot{x}_G = (g\sin\alpha + \varepsilon f g \cos\alpha)t + Cte \qquad (\text{La constante} = 0 \text{ si à } t = 0 \text{ on a } \dot{x}_G = 0)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{5}{2}\frac{\varepsilon}{r} fg\cos\alpha \cdot t \text{ avec } \dot{\varphi}(t=0) = 0$$

$$v_g(S/R_o) = \dot{x}_G + r\dot{\varphi} = gt(\sin\alpha + \frac{7}{2}\varepsilon f\cos\alpha)$$
$$= gt\cos\alpha(tg\alpha + \frac{7}{2}\varepsilon f)$$

La condition de roulement avec glissement impose $tg\alpha > \frac{7}{2} f \ \Rightarrow\ tg\alpha > \frac{7}{2}\varepsilon f \ (\forall\ \varepsilon)$

$v_g(S/R_o) > 0 \Rightarrow\ \varepsilon = -1$ (d'après une des lois de Coulomb).

Les équations du mouvement deviennent alors:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_G &= g\sin\alpha - fg\cos\alpha \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{5}{2r} fg\cos\alpha \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} N &= mg\cos\alpha \\ T &= -fmg\cos\alpha \end{aligned}$$

Remarque :

Dans le cas de cet exemple, on a trouvé $\varepsilon = -1$ puisque les conditions initiales utilisées sont celles du repos. Cependant, on peut avoir la situation où $\varepsilon = +1$ (situation plus rare) et ce, dépendamment des conditions initiales.

Exercice 2 : Mouvement d'une charrette dans un virage

Une charrette à deux roues est constituée d'un essieu (E), rigide et muni de deux roues identiques (D_1) et (D_2). L'essieu (E) est modélisé par une tige G_1G_2 de masse négligeable et

de longueur L. Les deux roues (D_1) et (D_2) sont modélisées par deux disques identiques, homogènes, de rayon *a*, de masse m (chacun) et de centres d'inertie G_1 et G_2. Les axes des deux disques sont confondus avec la tige G_1G_2. Les roues (D_1) et (D_2) tournent **sans frottement** autour de l'essieu G_1G_2.

La charrette prend un virage de telle sorte que le centre d'inertie G_1 de D_1 soit en mouvement circulaire **uniforme** ($\dot{\theta} = Cte$) de centre H et de rayon $HG_1 = r$ et que l'axe de l'essieu G_1G_2 soit confondu avec HG_1 (Figures 1 et 2) .

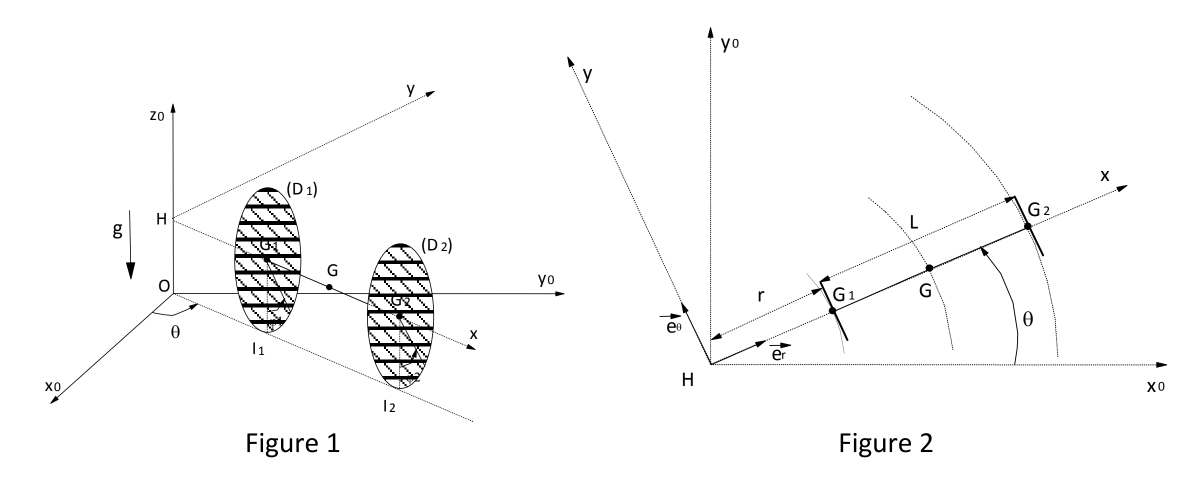


Figure 1 Figure 2

On désigne par R_0 (O, x_0, y_0, z_0) le repère fixe de base $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ et par R (H, x, y, z_0) le repère **lié à l'essieu** G_1G_2 de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k}_0)$. On pose $\omega = \dot{\theta}$ (vitesse angulaire de l'essieu), $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$ (vitesse angulaire de D_1 autour de G_1G_2) et $\omega_2 = \dot{\varphi}_2$ (vitesse angulaire de D_2 autour de G_1G_2). Les réactions du sol sur les points de contact I_1 et I_2 sont respectivement $\vec{R}_1 = R_{1r}\vec{e}_r + R_{1\theta}\vec{e}_\theta + R_{1z}\vec{k}_0$ et $\vec{R}_2 = R_{2r}\vec{e}_r + R_{2\theta}\vec{e}_\theta + R_{2z}\vec{k}_0$.

Tous les résultats doivent être exprimés dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k}_0)$.

1- Déterminer $\vec{\Omega}(D_1/R_0)$ et $\vec{\Omega}(D_2/R_0)$ en fonction de ω, ω_1 et ω_2.

2- Etablir les expressions des vitesses $\vec{v}(I_1 \in D_1/R_0)$ et $\vec{v}(I_2 \in D_2/R_0)$ en utilisant le point fixe H (qui peut être considéré comme un point commun aux deux solides D_1 et D_2).

3- En déduire les expressions de ω_1 et ω_2 en fonction ω, *a*, L et r dans le cas où les mouvements de D_1 et D_2 s'effectuent sans glissement.

4- Calculer les vitesses $\vec{v}(G_1/R_0)$, $\vec{v}(G_2/R_0)$ et $\vec{v}(G/R_0)$, et l'accélération $\vec{\gamma}(G/R_0)$.

5- Donner les matrices d'inertie II(G_1, D_1) et II(G_2, D_2) des deux disques dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k}_0)$.

6- Etablir les expressions des moments cinétiques $\vec{\sigma}(G_1, D_1/R_0)$ et $\vec{\sigma}(G_2, D_2/R_0)$ en fonction m, *a*, r, L et ω.

7- Montrer que les moments cinétiques $\vec{\sigma}(G, D_1/R_0)$ et $\vec{\sigma}(G, D_2/R_0)$ au centre de masse G du système, sont donnés par :

$$\vec{\sigma}(G, D_1/R_0) = m\omega\left[-r\frac{a}{2}\vec{e}_r + \left(\frac{a^2}{4} - \frac{L}{2}r\right)\vec{k}_0\right] \text{ et } \vec{\sigma}(G, D_2/R_0) = m\omega\left(-\frac{(r+L)a}{2}\vec{e}_r + \left(\frac{a^2}{4} + \frac{(r+L)L}{2}\right)\vec{k}_0\right)$$

8- En déduire l'expression de $\vec{\sigma}(G, S/R_0)$.

9- Calculer $\overrightarrow{GI_1} \wedge \vec{R}_1$ et $\overrightarrow{GI_2} \wedge \vec{R}_2$

10-En appliquant le théorème du centre de masse au système (S) formé par les deux disques, trouver 3 équations reliant les composantes des réactions $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$.

11-En appliquant le théorème du moment cinétique en G, trouver 3 autres équations reliant les composantes des réactions $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$.

12- Trouver les valeurs de $R_{1\theta}$ et $R_{2\theta}$ et montrer que les expressions des réactions R_{1z} et R_{2z} sont données par :

$$\begin{cases} R_{1z} = mg - 3ma\omega^2\left(\frac{r}{L} + \frac{1}{2}\right) \\ R_{2z} = mg + 3ma\omega^2\left(\frac{r}{L} + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Corrigé :

$\vec{\Omega}(D_1/R_0) = \omega_1\vec{e}_r + \omega\vec{k}_0$ (expression donnée dans l'énoncé)

1- $\vec{\Omega}(D_2/R_0) = \omega_2\vec{e}_r + \omega\vec{k}_0$.

2- $\vec{v}(I_1 \in D_1/R_0) = \vec{v}(O_1 \in D_1/R_0) + \vec{\Omega}(D_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1I_1}$ (ici on prendra H au lieu de O_1).

$$\vec{v}(I_1 \in D_1/R_0) = \underbrace{\vec{v}(H \in D_1/R_0)}_{=0} + \vec{\Omega}(D_1/R_0) \wedge \overrightarrow{HI_1} = (\omega_1\vec{e}_r + \omega\vec{k}_0) \wedge (r\vec{e}_r - a\vec{k}_0) = (a\omega_1 + r\omega)\vec{e}_\theta$$

$$\vec{v}(I_2 \in D_2/R_0) = \underbrace{\vec{v}(H \in D_2/R_0)}_{=0} + \vec{\Omega}(D_2/R_0) \wedge \overrightarrow{HI_2} = (\omega_2\vec{e}_r + \omega\vec{k}_0) \wedge ((r+L)\vec{e}_r - a\vec{k}_0) = [a\omega_2 + (r+L)\omega]\vec{e}_\theta$$

3- Absence de glissement en $I_1 \Rightarrow \vec{v}(I_1 \in D_1/R_0) = \vec{0} = (a\omega_1 + r\omega)\vec{e}_\theta \Rightarrow \omega_1 = -\frac{r\,\omega}{a}$

Absence de glissement en $I_2 \Rightarrow \vec{v}(I_2 \in D_2/R_0) = \vec{0} = [a\omega_2 + (r+L)\omega]\vec{e}_\theta \Rightarrow \omega_2 = -\frac{r+L}{a}\omega$

4- • $\vec{v}(G_1/R_0) = r\omega\vec{e}_\theta$, • $\vec{v}(G_2/R_0) = (r+L)\omega\vec{e}_\theta$,

• $\vec{v}(G/R_0) = \left(r+\frac{L}{2}\right)\omega\vec{e}_\theta$ et • $\vec{\gamma}(G/R_0) = -\left(r+\frac{L}{2}\right)\omega^2\vec{e}_r$

5- Les matrices d'inertie II(G_1, D_1) et II(G_2, D_2) dans la base $\left(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k}_0\right)$ sont • $II(G_1, D_1) = \frac{ma^2}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et • $II(G_2, D_2) = \frac{ma^2}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6- Les moments cinétiques de D_1 en G_1 et de D_2 en G_2 :

• $\vec{\sigma}(G_1, D_1/R_0) = \frac{ma^2}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{ma^2}{4}\left(2\omega_1\vec{e}_r + \omega\vec{k}_0\right) = m\omega\left(-\frac{ra}{2}\vec{e}_r + \frac{a^2}{4}\vec{k}_0\right)$

• $\vec{\sigma}(G_2, D_2/R_0) = \frac{ma^2}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_2 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{ma^2}{4}\left(2\omega_2\vec{e}_r + \omega\vec{k}_0\right) = m\omega\left(-\frac{(r+L)a}{2}\vec{e}_r + \frac{a^2}{4}\vec{k}_0\right)$

7- Moment cinétique de D_1 en G :

$$\vec{\sigma}(G, D_1/R_0) = \vec{\sigma}(G_1, D_1/R_0) + m\vec{v}(G_1/R_0) \wedge \overrightarrow{G_1G}$$

$$m\vec{v}(G_1/R_0) \wedge \overrightarrow{G_1G} = mr\omega\vec{e}_\theta \wedge \left(\frac{L}{2}\vec{e}_r\right) = -m\frac{rL}{2}\omega\vec{k}_0$$

• $\vec{\sigma}(G, D_1/R_0) = m\omega\left(-\frac{ra}{2}\vec{e}_r + \left(\frac{a^2}{4} - \frac{rL}{2}\right)\vec{k}_0\right)$

$$\vec{\sigma}(G, D_2/R_0) = \vec{\sigma}(G_2, D_2/R_0) + m\vec{v}(G_2/R_0) \wedge \overrightarrow{G_2G}$$

$$m\vec{v}(G_2/R_0) \wedge \overrightarrow{G_2G} = m(r+L)\omega\vec{e}_\theta \wedge \left(-\frac{L}{2}\vec{e}_r\right) = m(r+L)\frac{L}{2}\omega\vec{k}_0$$

• $\vec{\sigma}(G, D_2/R_0) = m\omega\left(-\frac{r+L}{2}a\vec{e}_r + [\frac{a^2}{4} + \frac{L}{2}(r+L)]\vec{k}_0\right)$

8- • $\vec{\sigma}(G, S/R_0) = m\omega\left(-\frac{(2r+L)a}{2}\vec{e}_r + \frac{(a^2+L^2)}{2}\vec{k}_0\right)$

9- $\overrightarrow{GI_1} \wedge \vec{R}_1 = \left(\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1I_1}\right) \wedge \left(R_{1r}\vec{e}_r + R_{1\theta}\vec{e}_\theta + R_{1z}\vec{k}_0\right) = \left(-\frac{L}{2}\vec{e}_r - a\vec{k}_0\right) \wedge \left(R_{1r}\vec{e}_r + R_{1\theta}\vec{e}_\theta + R_{1z}\vec{k}_0\right)$

- $\overrightarrow{GI}_1 \wedge \vec{R}_1 = aR_{1\theta}\vec{e}_r + \left(\frac{L}{2}R_{1z} - aR_{1r}\right)\vec{e}_\theta - \frac{L}{2}R_{1\theta}\vec{k}_0$

$$\overrightarrow{GI}_2 \wedge \vec{R}_2 = \left(\overrightarrow{GG}_2 + \overrightarrow{G_2I_2}\right) \wedge \left(R_{2r}\vec{e}_r + R_{2\theta}\vec{e}_\theta + R_{2z}\vec{k}_0\right) = \left(\frac{L}{2}\vec{e}_r - a\vec{k}_0\right) \wedge \left(R_{2r}\vec{e}_r + R_{2\theta}\vec{e}_\theta + R_{2z}\vec{k}_0\right)$$

- $\overrightarrow{GI}_2 \wedge \vec{R}_2 = aR_{2\theta}\vec{e}_r - \left(\frac{L}{2}R_{2z} + aR_{2r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{L}{2}R_{2\theta}\vec{k}_0$

10- $\vec{R}_1 + \vec{R}_2 + 2m\vec{g} = 2m\vec{\gamma}(G/R_0)$ avec $\vec{\gamma}(G/R_0) = -\left(r + \frac{L}{2}\right)\omega^2\vec{e}_r$

- $$\begin{cases} R_{1r} + R_{2r} = -2m\left(r + \frac{L}{2}\right)\omega^2 & (1) \\ R_{1\theta} + R_{2\theta} = 0 & (2) \\ R_{1z} + R_{2z} = 2mg & (3) \end{cases}$$

11- $\vec{\delta}(G, S/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{dt}\right)_{R_0} = -m\omega^2\,\frac{(2r+L)a}{2}\,\vec{e}_\theta$

$\vec{\delta}(G, S/R_0) = \overrightarrow{GI_1} \wedge \vec{R}_1 + \overrightarrow{GI_2} \wedge \vec{R}_2$ (le moment des deux poids est nul en G).

$$\begin{cases} 0 = a\left(R_{1\theta} + R_{2\theta}\right) & (4) \\ -m\omega^2\,\frac{(2r+L)a}{2} = \frac{L}{2}\left(R_{1z} - R_{2z}\right) - a\left(R_{1r} + R_{2r}\right) & (5) \\ 0 = \frac{L}{2}\left(R_{2\theta} - R_{1\theta}\right) & (6) \end{cases}$$

(2), (4) et (6) $\Rightarrow R_{1\theta} = R_{2\theta} = 0$

(1) dans (5) $\Rightarrow R_{1z} - R_{2z} = -3m\omega^2\,\frac{(2r+L)a}{L}$ (7)

(3) et (7) $\Rightarrow \begin{cases} R_{1z} = mg - \frac{3ma\omega^2}{L}\left(r + \frac{L}{2}\right) \\ R_{2z} = mg + \frac{3ma\omega^2}{L}\left(r + \frac{L}{2}\right) \end{cases}$

Exercice 3

Une sphère homogène S_1, de masse m, de centre de masse G et de rayon a, est placée initialement dans une position d'équilibre instable au sommet d'une demi-sphère S_2, de centre O et de rayon r ($r > a$). On admet que le contact entre S_1 et S_2 est ponctuel et on désignera par

f le coefficient de frottement. Le mouvement de S_1 sera étudié par rapport au repère fixe $R_0(O,\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$ et la position de G est repérée par l'angle $\theta=(Oy_0,OG)$. En déplaçant légèrement la sphère S_1 de sa position d'équilibre instable, celle-ci commence par **rouler sans glisser** sur S_2 (Figure 2).

On prendra $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{k}_0)$ comme base de projection.

1- Calculer $\vec{v}(G/R_0)$ en fonction de $\dot{\theta}$, *a* et r.

2- On pose $\vec{\Omega}(S_1/R_0)=\omega\vec{k}_0$. Déterminer ω en fonction de $\dot{\theta}$, *a* et r.

3- calculer l'énergie cinétique $E_C(S_1/R_0)$.

4- Calculer les puissances des forces agissant S_1 dans R_0, $P(F_{ext}\rightarrow S_1/R_0)$.

5- En déduire les expressions de $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ en fonction de g, r, *a* et θ.

6- En appliquant le théorème du centre de masse, déterminer les expressions des composante normale, N, et tangentielle, T, de la réaction de S_2 sur S_1.

7- Trouver la limite θ_g de θ à partir de laquelle S_1 commence à glisser sur S_2.

8- Trouver la limite θ_D de θ à partir de laquelle S_1 ne reste plus en contact avec S_2.

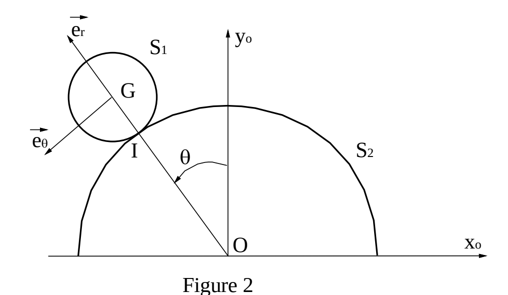


Figure 2

Corrigé :

- On a $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IG}=(r+a)\vec{e}_r \Rightarrow \vec{v}(G/R_0)=(r+a)\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

2- On a $\vec{\Omega}(S_1/R_0)=\omega\vec{k}_0$. De plus, la condition de roulement sans glissement de S_1 sur S_2 $\Rightarrow$
$\vec{v}_g(S_1/S_2)=\vec{v}(I\in S_1/R_0)=\vec{0}$

En utilisant la relation de transfert des vitesses pour un solide, on obtient:

$\vec{v}(G/R_0)+\vec{\Omega}(S_1/R_0)\wedge\overrightarrow{GI}=\vec{0}$ (On a utilisé les points I et G de S_1 dans la relation de transfert).

$$[(r+a)\dot{\theta}-a\omega]\vec{e}_\theta=\vec{0} \Rightarrow \omega=\frac{(r+a)}{a}\dot{\theta}$$

3- $E_C(S_1/R_0) = E_C(S_1/R_G) + 0.5m\vec{v}^2(G/R_0)$

* $\frac{1}{2}m\vec{v}^2(G/R_0) = \frac{1}{2}m(r+a)^2\dot{\theta}^2$

** $E_C(S/R_G) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t II(G,S_1)\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\omega^2 I_{Gz0} = \frac{m(r+a)^2\dot{\theta}^2}{5}$

$$E_C(S_1/R_0) = \frac{7}{10}m(r+a)^2\dot{\theta}^2$$

4- Puissance

$$P(F_{ext} \to S_1/R_0) = m\vec{g}\cdot\vec{v}(G/R_0) + \vec{R}_I\cdot\vec{v}(I \in S_1/R_0)$$
$$= m\vec{g}\cdot\vec{v}(G/R_0) = mg\sin\theta(r+a)\dot{\theta}$$

5- On applique le théorème de l'énergie cinétique

(On peut également utiliser la conservation de l'énergie mécanique de S_1):

$$\frac{dE_C(S_1/R_0)}{dt} = P(F_{ext} \to S_1/R_0)$$

* $\frac{7}{5}m(r+a)^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = mg\sin\theta(r+a)\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{5g\sin\theta}{7(r+a)}$

** $\frac{dE_C}{dt} = \frac{7}{10}m(r+a)^2\frac{d}{dt}(\dot{\theta}^2) = mg\sin\theta(r+a)\dot{\theta}$

$$\Rightarrow \quad d\dot{\theta}^2 = \frac{10}{7}\frac{g\sin\theta d\theta}{(r+a)}$$

Par intégration entre [t = 0 ($\theta = 0$) et t (θ)], on obtient:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{10}{7}\frac{g(1-\cos\theta)}{(r+a)}$$

6- Théorème du centre de masse:

$$m\vec{\gamma}(G/R_0) = m\vec{g} + T\vec{e}_\theta + N\vec{e}_r$$

Par projection :

$$\begin{cases} -m(r+a)\dot{\theta}^2 = N - mg\cos\theta \\ m(r+a) = T - mg\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{T} = -\frac{2}{7}mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta \\ \vec{N} = \frac{1}{7}mg(17\cos\theta - 10)\vec{e}_r \end{cases}$$

7- Pour $\theta = \theta_g$ on a $\left|\vec{T}\right| = f\,N \Rightarrow 2\sin\theta_g - 17f\cos\theta_g + 10f = 0$.

8- Rupture $\Rightarrow$ N = 0 et $\theta = \theta_d$ tel que: $\cos\theta_D = \dfrac{10}{17}$.

Exercices complémentaires

Exercice 4

Le système matériel (S), mobile dans le plan vertical fixe (xOy) (Ox vertical descendant), comporte un cerceau (C) rigide, de centre O, de moment d'inertie I par rapport à l'axe Oz et un disque (D) de masse m, de moment d'inertie J par rapport à l'axe Az, parallèle à Oz , passant par son centre d'inertie A. Le cerceau peut tourner sans frottement en O (point de contact) autour de l'axe Oz et le disque demeure en contact ponctuel en P à l'intérieur de (C). On admet que le frottement de contact entre (C) et (D) est suffisant pour assurer le roulement du disque sans glissement et on néglige le couple de résistance au roulement.

On pose OA = a et AP = b. Le mouvement de (S) est défini par les paramètres ψ, θ et φ tels que:

ψ : angle d'un rayon matériel de (C) avec Ox,

θ : angle de OP avec Ox,

φ : angle d'un rayon matériel de (D) avec Ax.

On désignera par N et T respectivement les composantes normale et tangentielle de la réaction de (C) sur (D).



1- Écrire la condition de roulement sans glissement en P.

2- Exprimer, en fonction des paramètres $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$:

a) Le moment cinétique de (D) par rapport à Az,

b) Le moment cinétique de (D) par rapport à Oz,

c) le moment cinétique de (S) par rapport à Oz.

3- En plus des forces de liaisons et des poids, le système est soumis à un couple d'axe Oz et d'intensité □ appliqué à (C). Donner les équations différentielles du mouvement du système (S) en appliquant :

a) Le théorème du moment cinétique à (S) en O.

b) Le théorème du moment cinétique à (D) en A.

c) Le théorème du centre de masse à (D).

4- On suppose que le couple Γ agit de sorte que $\Psi = 0, \forall t$.

a) Donner une équation différentielle du second ordre pour $\theta(t)$.

b) Déterminer $\theta(t)$ pour les petits mouvements en θ.

c) Déterminer l'expression de Γ en fonction de θ.

Exercice 5

On désire étudier le mouvement d'un système matériel composé d'un plateau (P) et d'un cylindre (C). Le plateau horizontal, de masse M, est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}_0$ le long de l'axe horizontal Ox_0. Sur ce plateau, on place un cylindre homogène (C), de masse m et de rayon *a* (Figure 1). Le cylindre est immobile par rapport au plateau.

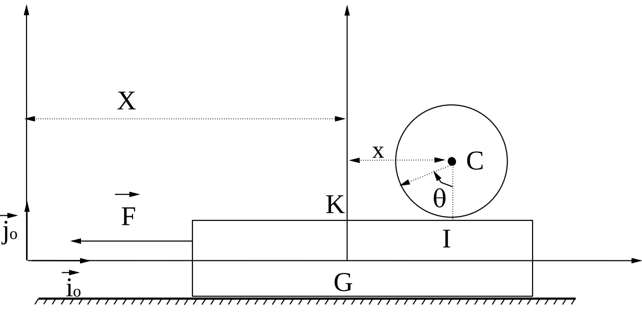


Figure 1

A l'instant t = 0, on applique une force de freinage, $\vec{F}$, constante. La résultante des forces de réaction du plateau sur le cylindre est $\vec{R} = \vec{T} + N\vec{j}_0$ (N > 0). Le coefficient de frottement de glissement du plateau sur le cylindre est *f*. On désigne par $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ le repère fixe et par $R_G(G, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ un repère lié au plateau (P). Le centre C du cylindre est repéré par rapport à R_G par $x = \overline{KI}$ avec x = 0 pour t = 0 (I en K). La rotation du cylindre est repérée par l'angle θ, avec θ = 0 pour t = 0. Le mouvement de (P) par rapport à R_0 est repéré par $X = \overline{OG}$, avec X = 0 pour t = 0 et $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$.

A- Cas du roulement sans glissement

1- Faire un schéma montrant les différentes forces qui agissent sur le système.

2- Donner la condition sans glissement.

3- Donner les équations différentielles qui régissent le mouvement du système en appliquant le PFD dans R_0 au cylindre seul puis au plateau seul.

4- Trouver la relation liant $\ddot{x}$ et $\ddot{X}$. En déduire que $x(t) = \dfrac{Ft^2}{3M + m}$.

5- Exprimer X(t) en fonction de F, v_0, M, m et t et trouver l'instant, t_a, d'arrêt du plateau.

6- Sachant que le plateau restera immobile pour $t \geq t_a$, trouver la force de frottement T et $\vec{v}(C/R_0)$.

7- Quelle est la nature du mouvement du cylindre pour $t \geq t_a$.

B- Cas du roulement avec glissement

1- Donner l'expression de la force de frottement T.

2- Exprimer la vitesse de glissement, $\vec{v}_g$, du cylindre sur le plateau en fonction de M, m, F, *f*, g et t.

3- Trouver, en fonction de M, m, F, *f* et g, l'instant t_1 où le plateau s'arrête.

4- Pour $t \geq t_1$, le plateau demeure immobile.

a) Déterminer $\vec{v}(C/R_0)$ en fonction de F, *f*, g, M, m, v_0 et t.

b) Trouver, en fonction de *f*, g et v0, l'instant t_2 où la vitesse de glissement s'annule.

5- Déterminer $\vec{v}(C/R_0)$ pour $t > t_2$.

6- Quelle est la nature du mouvement du cylindre.

Exercice 6

On considère une plaque, P, homogène de forme rectangulaire, de masse m, de largeur 2*a* et de longueur 2b $(b = \sqrt{3} \cdot a)$ en rotation autour d'une des deux diagonales à la vitesse angulaire ω constante (Figure 3). On désigne par $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère lié à la plaque et par $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ un repère fixe tel que $\vec{\Omega}(P/R_0) = \omega \vec{j}_0$. Le rectangle est supporté par deux paliers sans frottement : un palier P sans butée et un palier à butée P'. On donne OP = OP' = 4*a*.

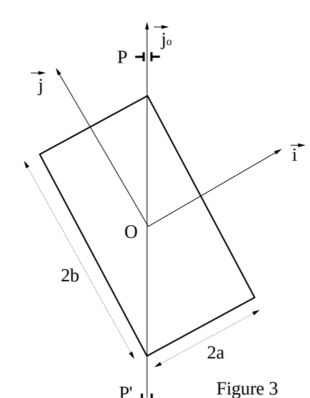


Figure 3

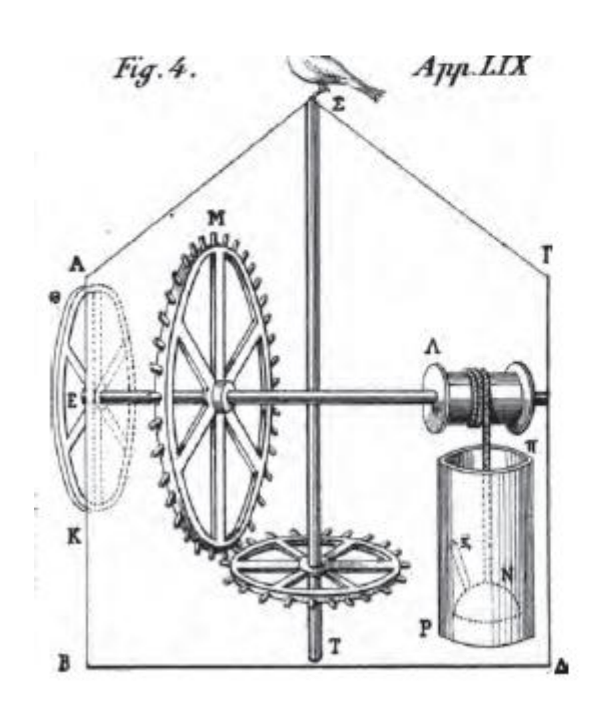
1- Déterminer la matrice d'inertie en O de la plaque, II(O, P).

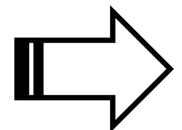
2- Est-ce que l'équilibrage statique est réalisé pour la plaque ? Justifier la réponse.

3- Calculer le moment cinétique de la plaque en O, $\vec{\sigma}(O, P/R_0)$. Conclure quant à l'équilibrage dynamique de la plaque.

4- Déterminer les composantes des réactions $\vec{R}$ et $\vec{R}'$ du système sur les deux paliers.







Mouvement d'un Solide Autour d'un Point ou d'un Axe Fixes



Leonhard Euler : (1707-1783)

L. Euler est la plus grande figure de mathématicien et mécanicien du XVIIIème siècle, ses études sont extrêmement nombreuses (plus de 800 publications, dont la moitié vers la fin de sa vie, quand il était devenu aveugle) et ses contributions et découvertes de premiers ordre. En mécanique, L. Euler découvre les fameuses lois du mouvement des corps rigides qui portent son non.

Objectifs :

- Savoir utilisé les angles d'Euler ;
- Différencier entre mouvements de rotation propre, mutation et précession ;
- Comprendre et savoir appliquer les théorèmes généraux dans le cas d'un mouvement de rotaion autour d'un point fixe ou d'un axe fixe.

Exercice 1 : Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

On considère un cylindre creux (C), homogène, de rayon r, de hauteur h, de centre d'inertie G et de masse m. Soit $R(G, xyz)$ le repère lié au cylindre de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sorte que le vecteur $\vec{k}$ soit porté par l'axe de révolution du solide. Le cylindre tourne autour de l'axe Gz_0, de vecteur directeur $\vec{k}_0$, du repère fixe $R_0(G, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ avec une vitesse angulaire uniforme ω. L'axe Gz_0 est contenu dans le plan yGz et fait un angle $\theta = \frac{\pi}{4}$ avec l'axe Gy (voir figure 1).

N.B. : Tous les résultats doivent être exprimés dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ liée au solide.

1- Est-ce que l'équilibrage statique est réalisé pour le cylindre ? Justifier votre réponse.

2- Déterminer la matrice d'inertie en G, II(G, C), du cylindre.

3- Déterminer le moment cinétique en G, $\vec{\sigma}(G, C/R_0)$.

4- Trouver une relation entre r et h pour que l'équilibrage dynamique soit réalisé.

5- On ferme le cylindre par un disque (D) homogène de rayon r et de masse m comme indiqué sur la figure 2.

5.1 Déterminer la position du centre de masse G′ du système (S) formé par le cylindre et le disque.

5.2 Est-ce que l'équilibrage statique est réalisé ? Justifier votre réponse.

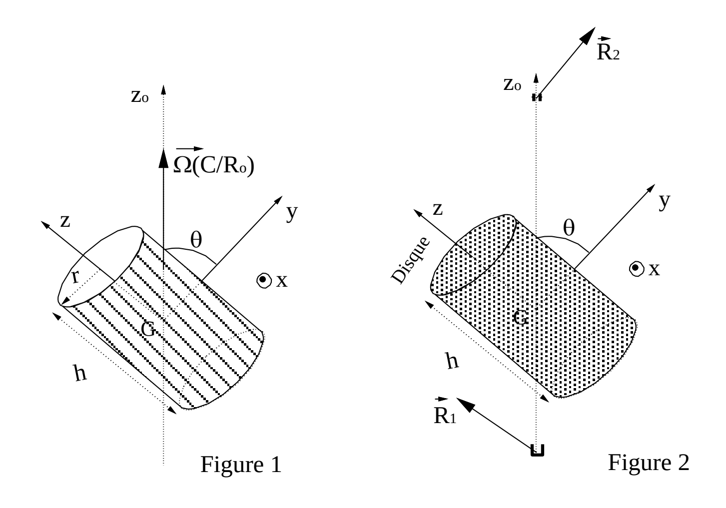
5.3 Déterminer l'accélération $\vec{\gamma}(G'/R_0)$ du centre de masse G′ du système (S).

5.4 On admet que le système (S) est soumis, en plus de son poids, aux réactions :

$\vec{R}_1 = R_{1x}\vec{i} + R_{1y}\vec{j} + R_{1z}\vec{k}$ et $\vec{R}_2 = R_{2x}\vec{i} + R_{2y}\vec{j} + R_{2z}\vec{k}$.

5.4.1 Appliquer le théorème du centre de masse et déduire trois équations algébriques.

5.4.2 Déduire des trois équations précédentes les composantes des réactions qui ne dépendent pas de la vitesse angulaire ω.



Corrigé :

I.1- L'équilibrage statique est réalisé car G $\in$ à l'axe de rotation du cylindre.

2- La matrice d'inertie est diagonale car le repère R(G,xyz) est un repère principal d'inertie.

$$II(G,C)=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$ Donc $A = I_{Ox} = I_{Oy}$ et $I_{Ox}+I_{Oy}=\int(x^2+y^2)dm+2\int z^2dm = I_{Oz}+2I_{xOy}$

$C = I_{Oz} = \int r^2 dm = r^2\int dm = mr^2$ et $I_{xOy}=\int z^2 dm = 2\pi r\sigma\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{mh^2}{12}$

$$II(G,C)=\begin{pmatrix} \frac{mr^2}{2}+\frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{2}+\frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & mr^2 \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$$

3- $\vec{\Omega}(C/R_0)=\omega\vec{k}_0=\frac{\omega}{\sqrt{2}}(\vec{j}+\vec{k})$

$$\vec{\sigma}(G,C/R_0)=II(G,C)\vec{\Omega}(C/R_0)=\begin{pmatrix} \frac{mr^2}{2}+\frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{2}+\frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & mr^2 \end{pmatrix}\frac{\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{\omega}{\sqrt{2}}(A\vec{j}+C\vec{k})$$

4- L'équilibrage dynamique est réalisé si $\vec{\sigma}(G,C/R_0)//\vec{k}_0 \Rightarrow A = C$

$$\frac{mr^2}{2}+\frac{mh^2}{12}=mr^2 \qquad \Rightarrow \qquad r=\frac{h}{\sqrt{6}}$$

5.1. $(m_D+m_C)\overrightarrow{GG'}=m_D\overrightarrow{GO_D} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{GG'}=\frac{h}{4}\vec{k}$

5.2. L'équilibrage statique est détruit par l'ajout du disque, car le nouveau centre de masse du système $G' \notin$ à l'axe de rotation du système. **(1 pt)**

5.3. $\vec{v}(G'/R_0)=\frac{h}{4}\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{R_0}=\frac{h}{4}\vec{\Omega}(C/R_0)\wedge\vec{k}=\frac{h\omega}{4\sqrt{2}}\left(\vec{j}+\vec{k}\right)\wedge\vec{k}=\frac{h\omega}{4\sqrt{2}}\vec{i}$

$$\vec{\gamma}(G'/R_0)=\frac{h\omega}{4\sqrt{2}}\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0}=\frac{h\omega}{4\sqrt{2}}\vec{\Omega}(C/R_0)\wedge\vec{i}=\frac{h\omega^2}{8}\left(\vec{j}+\vec{k}\right)\wedge\vec{i}=\frac{h\omega^2}{8}\left(\vec{j}-\vec{k}\right)$$

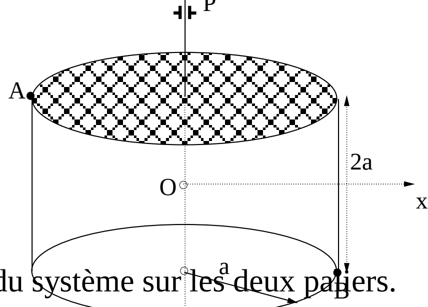
5.4.1. Théorème du centre de masse $2m\vec{g}+\vec{R}_1+\vec{R}_2=2m\vec{\gamma}(G'/R_0)$

$$\begin{cases} R_{1x}+R_{2x}=0 \\ R_{1y}+R_{2y}-\sqrt{2}mg=\dfrac{mh\omega^2}{4} \\ R_{1z}+R_{2z}-\sqrt{2}mg=-\dfrac{mh\omega^2}{4} \end{cases}$$

5.4.2. Les composantes R_{1x} et R_{2x} ne dépendent pas de ω.

Exercice 2

On considère un système formé par un cylindre homogène de masse M, de hauteur *2a*, de rayon *a* et deux masselottes A et B de masse m chacune, disposées comme indiqué sur la figure. Le système tourne autour de l'axe vertical Oz_0, à la vitesse angulaire constante ω. Il est supporté par deux paliers sans frottement : P et un palier à butée P'. On désigne par $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ le repère fixe et par $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_0)$ le repère lié au système tel que A et B sont dans le plan $(\vec{i}, \vec{k}_0)$. On donne OP = OP' = 2*a*



1- Donner la matrice d'inertie du système II(O, S).

2- Montrer qu'on a l'équilibrage statique

3- Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}(O, S/R_0)$

4- A-t-on l'équilibrage dynamique?

5- Déterminer les composantes des réactions $\vec{R}$ et $\vec{R}'$ du système sur les deux paliers.

6- A quel conditions aura-t-on l'équilibrage dynamique ?

BIBLIOGRAPHIE

- AGATI, LEROUGE et ROSSETTO, Liaisons, mécanismes et assemblages, DUNOD 1994.
- S. Pommier & Y. Berthand, Mécanique générales, Dunod, Paris, 2010.
- M.Hasnaoui et A. EL Maâchai, cours de mécanique 2, Première édition, FSSM, 2010.

Exercices et examens résolus: Mécanique des Systèmes de Solides Indéformables

M. BOURICH

Ce recueil d'exercices et examens résolus de mécanique des systèmes indéformables est issu de l'enseignement que je dispense depuis 2004. Il est destiné à être un support pédagogique pour les étudiants de la deuxième année de ENSA. Il n'est pas nécessaire de souligner l'intérêt que peuvent trouver les étudiants dans un polycopié consacré uniquement aux exercices et problèmes d'examens corrigés. Ces exercices couvrent les sept chapitres du polycopié de cours de la mécanique des systèmes indéformables :

- Calcul vectoriel-Torseurs,
- Cinématique du solide,
- Géomètrie des masses,
- Cinétique du solide,
- Dynamique du solide,
- Liaisons-Forces de liaison,
- Mouvement d'un solide autour d'un point ou d'un axe fixes.

Ces deux polycopiés, l'un de cours et l'autre d'exercices et examens résolus forment un ensemble cohérent pour permettre aux étudiants :

- de consolider leurs connaissances,
- un entrainement efficase afin de s'assurer que le cours est bien assimillé,
- d'acquérir les outils et techniques nécessaires à leur formation,
- de compéter leurs cultures scientifique en mécanique.

Comme pour tous les exercices auto-correctifs, les solutions profitent plus aux étudiants qui fournissent l'effort nécessaire pour réfléchir et essayer de résoudre les exercices proposés.

M. BOURICH, Docteur ès Sciences, Enseignant chercheur à l'École Nationale des Sciences Appliquées-Marrakech, Spécialité : Énergétique, membre du laboratoire Mécanique des Fluides et Énergétique de la Faculté des Sciences Semlalia-Marrakech.

On ne peut rien apprendre aux gens. On peut seulement les aider à découvrir qu'ils possèdent déjà en eux tout ce qui est à apprendre.

Citation de **G. Galilée**